F 1503/5

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

TOMUL XVIII (XXII)

Fasc. 1–2

SECŢIA V

CONSTRUCŢII
ARHITECTURĂ

1972

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

TOMUL XVIII (XXII)

Fasc. 1–2

SECŢIA V CONSTRUCŢII ARHITECTURĂ

1972

COLEGIUL DE REDACȚIE

Prof. em. dr. doc. GH. ALEXA, prof. em. ing. D. ATANASIU, prof. ing. C. CALISTRU
prof. ing. T. GOLGOȚIU, prof. dr. doc. D. MANGERON (secretar),
conf. ing. A. MARCHIȘ, prof. dr. doc. D. RUSU,
acd. prof. dr. doc. CRISTOFOR SIMIONESCU (președinte)

COMITETUL DE REDACȚIE AL SECȚIEI

CONSTRUCȚII. ARHITECTURĂ

Prof. dr. ing. C. CIOBANU
Conf. ing. VL. BOGHIAN
Conf. dr. ing. A. RADU

REDACȚIA

Prof. dr. doc. D. MANGERON (redactor responsabil)
Conf. dr. ing. HUGO ROSMAN (secretar)
Ing. ANETA BRAIER (redactor)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1—2 1972

Secţia V

CONSTRUCŢII. ARHITECTURĂ

SUMAR

Pag.

J. D. ROBSON (Anglia), Folosirea analizei proceselor staţionare aleatorii în prezicerea răspunsului structurilor la cutremure (engl., rez. rom.) 1

VICTOR FLORIN POTERAŞU şi N. IONIŢĂ, Programarea dinamică a determinării frecvenţei fundamentale de vibraţie a plăcilor elastice (engl., rez. rom.) 7

FLORIN MACAVEI şi MARIANA MACAVEI, Matrice 4- şi 6-dimensionale, tridiagonale, în rezolvarea structurilor plane şi spaţiale (rom., rez. engl.) 13

IOANA MISSIR şi AL. EFTIMIE, Tensiuni şi deplasări într-un semispaţiu elastic omogen şi transversal anizotrop, acţionat de un moment uniform distribuit în lungul unei axe pe planul de separaţie (rom., rez. engl.) 19

V. ILLE, HORST MÜHSAM, VIOREL POP şi I. MAGIAROSY, Determinarea teoretică şi experimentală a eforturilor şi suprafeţelor de influenţă la o placă trapezoidală, simplu rezemată pe contur (germ., rez. rom.) 25

I. COŞEREANU şi I. DEUTSCH, Asupra schimbării sistemului de bază la ridicarea nedeterminării pentru grinzi drepte pe mai multe reazeme (germ., rez. rom.) 35

GH. MĂRMUREANU şi C. JANTEA, Efortul unitar critic pentru plăci dreptunghiulare cu ambele laturi neîncărcate, articulate sau încastrate, în domeniul elasto-plastic (engl., rez, rom.) 41

EMANOIL BÂRSAN şi VICTOR ZAVATI, Utilizarea calculului matriceal la rezolvarea reţelelor inelare de alimentare cu apă (rom., rez. engl.) 49

D. PRECUPANU, Consideraţii asupra stabilităţii generale a grinzilor drepte comprimat—încovoiate (II) (franc., rez. rom.) 55

Pag.

PAUL COSMULESCU și RUDOLF MÜHLBÄCHER, Referitor la unele aspecte ale defectoscopiei complexe, nedistructive, pentru controlul cusăturilor sudate (I) (germ., rez. rom.) 61

AL. CIORNEI, TUDOR SILION, VIOREL ERHAN și GABRIELA COVALI, Cercetări privind proprietățile fizice și caracteristicile chimico-mineralogice ale loessului din craşul Iași (franc., rez. rom.) . . 69

C. PLĂCINTĂ, Influența mărimii deformației asupra modulului de rigiditate în cazul unei mixturi de mortar asfaltic (rom., rez. franc.) . . 79

EUGEN POPA, IULIAN BARBĂLATA, GH. GAVRILOV, CALISTRU APREUTESEI și GH. NISTOR, Asupra măririi preciziei în calculul punctelor determinate prin intersecții înainte (rom., rez. franc.) . 83

IULIAN BARBĂLATA, GH. GAVRILOV și EUGEN POPA, Determinarea punctelor triple prin coordonate baricentrice (rom., rez. franc.) 89

LONGHIN MACAREVICI, IULIAN IONESCU, EMANOIL BÂRSAN, M. DIMA, OLIMPIA BLĂGOI și C. MANOLE, Contribuții la studiul decantoarelor radiale (engl., rez. rom.) 97

M. DIMA și IULIAN IONESCU, Considerații cu privire la proiectarea optimă a treptei biologice la stații de epurare (rusă., rez. rom.) . 105

VICTOR ZAVATI și OLIMPIA BLĂGOI, Contribuții la dimensionarea hidraulică economică a podețelor dalate cu scurgere liberă (germ., rez. rom.). 115

I. C. BURLACU, Considerații asupra prizei, întăririi și întăriri hidrotermice a cimenturilor amestecate cu calcar și cenușă de pirită (rom., rez. franc.) 121

FLORICA VASILESCU și ELISABETA PĂUNEL, Contribuții la studiul prevenirii fenomenului de eflorescență la ceramică (rom., rez. franc.) 137

C. BRANIȘTE, I. BURLACU, AURORA BORDEA și RODICA MATEI, Comportarea cimenturilor cu cenușă de pirită în alcătuirea mortarelor (rom., rez. franc.) 143

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tom XVIII (XXII), Fasc. 1—2 1972

Section V

CONSTRUCTIONS. ARCHITECTURE

CONTENTS

Pp.

J. D. ROBSON (Great Britain), The use of Stationary Random Process Analysis in the Prediction of the Earthquake Response of Structures (English, Romanian summary) 1

VICTOR FLORIN POTERAŞU and N. IONIŢĂ, Elastic Plate's Fundamental Frequency of Vibration using the Dynamic Programming Approach (English, Romanian summary) 7

FLORIN MACAVEI and MARIANA MACAVEI, Tridiagonal 4- and 6-dimensional Matrices in Solving the Plane and Space Structures (Romanian, English summary) 13

IOANA MISSIR and AL. EFTIMIE, Stress and Displacements in an Elastic Homogenous and Cross Anisotropic Half Space Acted by an Uniform Distributed on an Axis Moment (Romanian, English summary) . 19

V. ILLE, HORST MÜHSAM, VIOREL POP und I. MAGYAROSY, Theoretische und experimentelle Bestimmung der Schnittkräfte und Einflussflächen einer allseitig frei drehbar gelagerten Trapezplatte (German, Romanian summary) 25

I. COŞEREANU und I. DEUTSCH, Über das Wechseln des Grundsystems beim Aufheben der Unbestimmtheit von Geraden auf mehrere Stützen aufliegenden Balken (German, Romanian summary) . 35

GH. MĂRMUREANU and C. JANTEA, The Critical Compressive Stress for Rectangular Plates with both Unloaded Edges either Hinged or Clamped in the Elasto-Plastic Range (English, Romanian summary) 41

EMANOIL BÂRSAN and VICTOR ZAVATI, Utilisation of the Matrix Algebra to the Resolving the Water Supply Systems (Romanian, English summary) 49

D. PRECUPANU, Considérations sur la stabilité générale des poutres droites soumises à la flexion—compression (II) (French, Romanian summary) 55

Pag.

PAUL COSMULESCU und RUDOLF MÜHLBÄCHER, Bezüglich einiger Aspekte der zerstörungsfreien Defektoskopie für die Untersuchung geschweisster Verbindungen (I) (German, Romanian summary) . 61

AL. CIORNEI, TUDOR SILION, VIOREL ERHAN et GABRIELA COVALI, Recherches sur les propriétés physiques et sur les caractéristiques chimiques-minéralogiques du loess de la ville de Jassy (French, Romanian summary) 69

C. PLĂCINTĂ, Influence exercée par la grandeur de la déformation sur le module de rigidité, dans le cas d'une mixture bitumineuse (Romanian, French summary) 79

EUGEN POPA, IULIAN BARBĂLATĂ, GH. GAVRILOV, CALISTRU APREUTESEI et GH. NISTOR, Sur l'augmentation de la précision du calcul des coordonnées des points déterminés par l'intersection en avant (Romanian, French summary) 83

IULIAN BARBĂLATĂ, GH. GAVRILOV et EUGEN POPA, Détermination des points triples par des coordonnées barycentriques (Romanian, French summary) 89

LONGHIN MACAREVICI, IULIAN IONESCU, EMANOIL BÂRSAN, M. DIMA, OLIMPIA BLĂGOI and C. MANOLE, Contributions to the Radial Settling Tanks (English, Romanian summary) . . 97

M. DIMA and IULIAN IONESCU, Considerations regarding the Optimum Design of the Biologic Step of the Purification Stations (Russian, Romanian summary) 105

VICTOR ZAVATI und OLIMPIA BLĂGOI, Beitrag zur wirtschaftlichen Hydraulischen Bemessung von plattenbelegte Fussbrücken mit freiem Abfluss (German, Romanian summary) 115

I. C. BURLACU, Considérations concernant la prise, le renforcement et le renforcement hydrothermique des ciments en mélange avec du calcaire et de la cendre de pyrite (Romanian, French summary) . 121

FLORICA VASILESCU et ELISABETA PĂUNEL, Contribution à l'étude de la prévention du phénomène d'efflorescence de la céramique (Romanian, French summary) 137

C. BRANIŞTE, I. BURLACU, AURORA BORDEA et RODICA MATEI, Comportement des ciments contenant cendre de pyrite dans la réalisation des mortiers (Romanian, French summary) 143

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Том XVIII (XXII), вып. 1—2 1972

Секция V

СТРОИТЕЛЬСТВО. АРХИТЕКТУРА

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Дж. Д. РОБСОН (Великобритания), Использование анализа вероятностных стационарных процессов для предвидения ответа структур на землетрясения (англ., рез. рум.) 1

ВИКТОР ФЛОРИН ПОТЕРАШУ и Н. ИОНИЦЭ, Динамическое программирование определения фундаментальной частоты вибрации упругих пластин (англ., рез. рум.) 7

ФЛОРИН МАКАВЕЙ и МАРЯНА МАКАВЕЙ, 4- и 6-мерные тридиагональные матрицы в решении плоских и пространственных структур (рум., рез. англ.) 13

ИОАНА МИССИР и АЛ. ЕФТИМИЕ, Напряжения и перемещения в упругом однородном и неизотропном полупространстве, под действием равномерно распределенного момента (рум., рез. англ.) . 19

В. ИЛЛЕ, ГОРСТ МЮЗАМ, ВЙОРЕЛ ПОП и И. МОГЙОРОШИ, Теоретическое и экспериментальное определение напряжений и поверхностей влияния для трапецойдальной пластинке, свободно лежащей по контуре (нем., рез. рум.) 25

И. КОШЕРЯНУ и И. ДОЙЧ, О модификации основной системы при устранении неопределимости многопролетных прямых балок (нем., рез. рум.) 35

Г. МЭРМУРЯНУ и К. ЖАНТЯ, Критическое напряжение для прямоугольных пластинок с двойными сторонами ненагруженными шарнирными или заделанными в упруго-пластичной стадии (англ., рез. рум.) 41

ЭМАНОИЛ БЭРСАН и ВИКТОР ЗАВАТИ, Применение матричного расчета для решения кольцевых сетей водоснабжение (рум., рез. англ.) 49

Д. ПРЕКУПАНУ, Об общий устойчивости сжато—изогнутых стержней (II) (франц., рез. рум.) 55

Стр.

ПАУЛ КОСМУЛЕСКУ и РУДОЛЬФ МЮЛБЕХЕР, Относительно некоторых аспектов комплексно-недеструктивной деффектоскопий для контроля спаивания (I) (нем., рез. рум.) 61

АЛ. ЧОРНЕЙ, ТУДОР СИЛИОН, ВИОРЕЛ ЕРХАН и ГАБРИЕЛА КОВАЛИ, Исследование физических свойств и химико-минералогических характеристик лесса в районе города Яссы (франц., рез. рум.) 99

К. ПЛЭЧИНТЭ, Влияние величин деформации на модуль жесткости в случай микстуры асфальтого раствора (рум., рез. франц.) . 69

ЕУДЖЕН ПОПА, ЮЛЯН БАРБЭЛАТЭ, Г. ГАВРИЛОВ, КАЛИСТРУ АПРЕУТЕСЕЙ и Г. НИСТОР, К повышению точности расчета координат точек в случае прямой засечки (рум., рез. франц.) . 83

ЮЛЯН БАРБЭЛАТЭ, Г. ГАВРИЛОВ и ЕУДЖЕН ПОПА, Определение тройных точек при помощи барицентрических координат (рум., рез. франц.) 89

ЛОНГИН МАКАРЕВИЧ, ЮЛЯН ИОНЕСКУ, ЕМАНОИЛ БЭРСАН, М. ДИМА, ОЛИМПЯ БЛЭГОЙ и К. МАНОЛЕ, К вопросу исследования радиальных отстойников (англ., рез. рум.) . . 97

М. ДИМА и ЮЛЯН ИОНЕСКУ, К вопросы наилучшего проектирования биологической ступени на очистительных станциях (русск.. рез. рум.) 105

ВИКТОР ЗАВАТИ и ОЛИМПЯ БЛЭГОЙ, Бклады к экономическим гидравлическим расчетам для плитовых мостов со свободным протеканием (нем., рез. рум.) 115

И. К. БУРЛАКУ, О схватывании, твердении и гидрометрическом твердении цемента, смешанного с известняком и колчеданной золой (рум., рез. франц.) 121

ФЛОРИКА ВАСИЛЕСКУ и ЕЛИСАБЕТА ПЭУНЕЛ, Исследование предупреждения эффлоресценции керамики (рум., рез. франц.). . 137

К. БРАНИШТЕ, И. БУРЛАКУ, АУРОРА БОРДЕА и РОДИКА МАТЕЙ, Поведение цемента с колчеданной золой в составлений растворов (рум., рез. франц.) 143

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1—2, 1972
Secţia V
CONSTRUCŢII, ARHITECTURĂ

C. D. 624.04; 519.2; 550,8

THE USE OF STATIONARY RANDOM PROCESS ANALYSIS IN THE PREDICTION OF THE EARTHQUAKE RESPONSE OF STRUCTURES

BY

J. D. ROBSON

1. Introduction

If the motions of structures during earthquakes are to be predicted, an assumption must be made as to the ground motions which will excite them. Such ground motions bear little resemblance to member functions of stationary random processes. Nor, because they are generated by a variety of different mechanisms, are descriptions based on non-stationary random processes strictly applicable to them, even if the extent of the consequent analysis is not intolerable. Yet Bycroft [1] achieved a striking success in simulating earthquake response of structures by using a finite burst of white noise to simulate the ground motion, and using this as the excitation of an analogue computer representation of a structure. It is natural to consider the possibility of carrying this idealisation a stage further by replacing the burst of white noise by a continuous white noise excitation. If this can be done an enormous simplification in response analysis results, for the response relations for excitation by a stationary random process are extremely simple [2].

The problem was approached in this way by Pereira [3] as long ago as 1965, but his paper is largely concerned with other matters and his analysis is indicated so briefly that it is impossible to be certain of the details. As the main virtue of this method is the simple analysis which it permits, the development here of the complete argument would seem to be valuable.

In the present paper, therefore, Bycroft's standard burst of white noise with duration 25 sec and spectral density 0.75 (ft/sec^2)/(cycle/sec) will be replaced by continuous Gaussian white noise of the same spectral density, and the average maximum response peak to be expected in an interval of 25 sec is then determined. The validity — or otherwise — of this procedure for predicting maximum response may be established by comparing results predicted by this analysis assuming continuous excitation with those obtained on the analogue computer by Bycroft using finite bursts of excitation.

B y c r o f t's results (which agree well with results given by H o u s n e r [4] for response to actual earthquake excitations) give the value of the maximum velocity of response during a 25 sec burst of a single-degree-of-freedom system having various combinations of damping and natural period. (His recorded results are in fact the average of maxima taken from each of twenty different bursts). What will be predicted here, for the sake of simplicity in analysis, is the magnitude of the velocity peak which will be experienced once, on the average, during each interval of 25 sec by continuous excitation. This is not quite the same thing as the average maximum velocity taken from a number of intervals, but should not in practical circumstances prove very different.

Because one cannot well expect to describe with any accuracy the characteristics of an earthquake which has not yet occurred, great precision in the analysis is not called for, and some approximation can be tolerated.

2. Basic Results for Stationary Random Processes

A Gaussian stationary (and ergodic) random process $\{x(t)\}$, consisting of an ensemble of time-varying member functions $x(t)$, is conveniently described by its spectral density $S_x(f)$. Once the spectral density is defined as a function of frequency f, most other properties of the process may be determined. (The assumption of ergodicity implies that statistical quantities averaged over all time for a single function $x(t)$ will be equal to those obtained by averaging over all member functions of $\{x(t)\}$ for an single time t. This assumption makes it possible to consider a single typical member function $x(t)$ in all that follows).

Thus the mean-square value $\sigma_x^2 = < x^2(t) >$ is given by

$$\sigma_x^2 = \int_0^\infty S_x(f)\, \mathrm{d}f. \tag{1}$$

It can be shown [2] that for a process with spectral density $S(f)$ and mean-square value σ_x^2, the peaks are distributed in such a way that the expectation of peaks of magnitude greater than $n\sigma$ in unit time is given (very closely) by

$$E_1 = \frac{\int_0^\infty f^2 S(f)\, \mathrm{d}f}{\int_0^\infty S(f)\, \mathrm{d}f}\, \mathrm{e}^{-n^2/2}. \tag{2}$$

(It is assumed that the process has zero mean value).

The spectral density of the response of a linear system can easily be determined if that of the excitation is known. If the excitation $x_i(t)$ of a linear system has spectral density $S_{x_i}(f)$ and the response $x_0(t)$ has spectral density $S_{x_0}(f)$, the spectral densities are related by

$$S_{x_0}(f) = |\alpha_{x_0 x_i}(f)|^2 S_{x_i}(f), \tag{3}$$

where $\alpha_{x_0 x_i}(f)$ is the receptance of the system determined in the usual way at discrete frequency. The response of a linear system to a Gaussian random process is itself Gaussian.

3. Response to Ground Motion

The system considered by B y c r o f t is a simple spring-mass system with viscous damping having equation of motion

$$\ddot{x} + 4\pi\lambda f_n \dot{x} + 4\pi^2 f_n^2 x = a(t), \tag{4}$$

where $a(t)$ is the imposed ground acceleration and x is the relative motion of the mass. The (undamped) natural frequency is denoted by f_n, and λ is the ratio of damping to critical damping.

For comparison with the results of B y c r o f t it is response *velocity* that must be investigated. The receptance $\alpha_{\dot{x}a}(f)$ connecting velocity with ground acceleration will therefore be needed; it can be shown from (4) that

$$\alpha_{\dot{x}a}(f) = -\frac{-if}{2\pi[f_n^2 - f^2 + i2\lambda f_n f]}. \tag{5}$$

If therefore the ground acceleration $a(t)$ takes the form of Gaussian white noise of uniform spectral density $S_a(f) = S_1$, the spectral density of the velocity response $\dot{x}(t)$ is

$$S(f) = S_{\dot{x}}(f) = \frac{f^2}{4\pi^2[(f_n^2 - f_2)^2 + 4\lambda^2 f_n^2 f^2]} S_1. \tag{6}$$

In what follows the subscripts will be suppressed because it will always be *velocity* which is considered.

The mean square value of velocity response is then given by

$$\sigma^2 = \int_0^\infty S(f)\,df = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty \frac{f^2\,df}{(f_n^2 - f_2)^2 + 4\lambda^2 f_n^2 f^2} S_1. \tag{7}$$

The integral can be evaluated by contour integration to give

$$\sigma^2 = \frac{S_1}{16\pi\lambda f_n} = \frac{S_1 T}{16\pi\lambda}, \tag{8}$$

writing $T = 1/f_n$ — natural period, in conformity with Bycroft and Housner.

By (2) the expectation of velocity peaks greater than $n\sigma$ in time τ is given by

$$E_\tau = \frac{\int_0^\infty f^2 S(f)\,\mathrm{d}f}{\int_0^\infty S(f)\,\mathrm{d}f} - \mathrm{e}^{-n^2/2}\tau, \tag{9}$$

where the value of σ is that given by (8) and $S(f)$ is as given by (6).

The two integrals in (9) can be evaluated as in what follows: that in the denominator is as given in (8), and that in the numerator can be evaluated similarly to give, approximately,

$$\int_0^\infty f^2 S(f)\,\mathrm{d}f = \frac{S_1 f_n}{16\pi\lambda} = \frac{S_1}{16\pi\lambda T}. \tag{10}$$

Thus (9) becomes

$$E_\tau = \frac{\tau}{T}\mathrm{e}^{-n^2/2}. \tag{11}$$

For an expectation of one peak above $n\sigma$ in time τ, by (11), it follows that $E_\tau = 1$, and so

$$\mathrm{e}^{n^2/2} = \frac{\tau}{T}.$$

i. e.

$$n = \sqrt{2 \ln \frac{\tau}{T}}. \tag{12}$$

So the velocity magnitude which will be exceeded, on the average once during an interval τ is, by (12) and (8), given by

$$V_{\max} = n\sigma = \sqrt{\frac{S_1 T}{8\pi\lambda} \ln \frac{\tau}{T}}. \tag{13}$$

Putting in Bycroft's parameters of $S_1 = 0.75$, $\tau = 25$, and taking a damping such that $\lambda = 0.1$, the following values of maximum velocity are obtained:

T, [sec]	0.2	0.4	0.8	1.4	2.0	3.0
V_{max}, [in/sec]	0.54	0.71	0.90	1.10	1.23	1.38

The corresponding values taken from B y c r o f t's plotted points are:

V_{max}, [in/sec]	0.60	0.80	1.05	1.30	1.50	1.70

There is quite reasonable agreement under the circumstances, and the usefulness of the stationary random process approach is confirmed.

It should be pointed out that agreement will not be so good for very low dampings, and the method breaks down completely for zero damping. Errors will be increased also if the period of the system is closer to the duration of the sampling period. It seems, however, that the comparison remains valid for values of damping and period likely to be important in practice.

4. Conclusions

It has been shown that, in the calculation of maximum velocity, the assumption that excitation is continuous white noise leads to reasonably good agreement with the results of B y c r o f t which are based on the assumption of excitation by a finite burst of white noise. As B y c r o f t's results are known to give good agreement with results based on actual earthquake record inputs, the present results are evidently applicable as simulating earthquake excitation.

The determination of maximum velocity is, however, unimportant in itself: it has been merely a device to prove the validity of the technique. Now that this has been established the whole technique of response analysis for stationary Gaussian random processes may be applied to the earthquake response problem. This includes the ability to determine the response of systems having many degrees of freedom and multiple inputs.

Some accuracy is necessarily lost by adopting so serious a departure from the actual excitation, but the facility of response analysis which this technique permits may prove very valuable indeed.

Received May 21, 1971

The University of Glasgow,
Scotland, Great Britain

REFERENCES

1. Bycroft G. N., *White Noise Representation of Earthquakes.* Proc. A. S. C. E., EM 2 (1960).
2. Robson J. D., *An Introduction to Random Vibration.* Edinburgh University Press, 1963.
3. Pereira J. M. J., *Behaviour of an Elasto Plastic Oscillator Acted by Random Vibration.* Labóratorio Nacional de Engenharia Civil, Lisbon, Memória *267* (1965).
4. Housner G. W., *Behaviour of Structures During Earthquakes.* Proc. A. S. C. E,. EM 4 (1959).

FOLOSIREA ANALIZEI PROCESELOR STAŢIONARE ALEATORII ÎN PREZICEREA RĂSPUNSULUI STRUCTURILOR LA CUTREMURE

(Rezumat)

Autorul, folosind analiza proceselor staţionare aleatorii, găseşte posibilităţi care converg satisfăcător la rezultatele lui Bycroft, de prezicere a răspunsului structurilor la cutremure.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1—2, 1972
Secţia V
CONSTRUCŢII, ARHITECTURĂ

D. C. 531,32; 538,551.6; 539,31

ELASTIC PLATE' S FUNDAMENTAL FREQUENCY OF VIBRATION USING THE DYNAMIC PROGRAMMING APPROACH

BY

VICTOR FLORIN POTERAŞU and N. IONIŢĂ

Dedicated to professor D. MANGERON on his jubilee year

1. In V. F. Poteraşu's recent doctoral dissertation [1] there were developed various optimization techniques and subsequently applied to a large set of civil engineering problems.

In what follows the authors, using step by step the Dynamic Programming Approach extended by D. Mangeron to his polyvibrating systems [1]), expose determination of an elastic plate fundamental frequency of vibration.

2. To simplify, let us consider here a rectangular elastic plate of variable thickness. The fundamental frequency of vibration is determined by taking into consideration the problem of minimization of the expression

$$\omega^2 = \frac{\iint\limits_R \left\{ D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - 2(1-\nu) D\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right\} dx\, dy}{\iint\limits_R A u^2\, dx\, dy}, \tag{1}$$

where $D = Eh^3(x,y)/12(1-\nu^2)$ is the plate's cylindrical rigidity, $h(x, y)$ —its thickness, E — the Young modulus, ν — the Poisson constant, ρ — the density of material, R — the domain of the plate, $A(x, y) = \rho h(x, y)$.

The problem thus is equivalent with determining the relative minima of the expression

$$\iint\limits_R \left\{ \left(D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 - 2D(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right\} dx\, dy, \tag{2}$$

subject to the constraints

---

[1]) Various scientists from abroad called the polyvibrating systems introduced by D. Mangeron, the „Mangeron equations". See, for instance, G. Birkhoff [2], W. Gordon [3], T. Kamytov [4], S. Easwaran [5].

$$\iint_R Au^2 \, dx \, dy = 1, \tag{3}$$

$$u(0, y) = u(x, 0) = u(1, y) = u(x, 1) = 0, \tag{4}$$

if one takes

$$R = \begin{pmatrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

or, conversely, to that of determining the relative maxima of

$$\iint_R Au^2 \, dx \, dy, \tag{6}$$

subject to the constraints (4) and

$$\iint_R \left\{ D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 - 2D(1 - \nu)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right\} dx \, dy = 1, \tag{7}$$

in the domain R given by (5).

3. Following the formalism of dynamic programming improved by D. Mangeron [6] and subsequently continued successfully by him in collaboration with Prof. M. N. Oğuztöreli [7]...[10], we consider the minimization of

$$J(u) = \int_{a_1}^{1} \int_{a_2}^{1} \left\{ D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 - 2D(1 - \nu)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right\} dx \, dy, \tag{8}$$

over all u satisfying the conditions

$$u(a_1, y) = k_1(y), \quad u(x, a_2) = k_2(x), \quad k_1(a_2) = k_2(a_1) = k, \quad u(x, 1) = u(1, y) = 0, \tag{9}$$

$$\int_{a_1}^{1} \int_{a_2}^{1} Au^2 \, dx \, dy = 1. \tag{10}$$

Here the new state variables a_1, a_2 satisfy the conditions

$$0 \leqslant a_1 < 1, \quad 0 \leqslant a_2 < 1. \tag{11}$$

We assume that the function $A(x, y)$ satisfies the condition

$$0 < b \leqslant A(x, y) \leqslant b_2,$$

for all $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ and is continuous over $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

Let us set a functional

$$f(a_1, a_2, k_1(y), k_2(x)) =$$

$$= \min \int_{a_1}^{1} \int_{a_2}^{1} \left\{ D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 - 2D(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2\right] \right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{12}$$

subject to the constraints (9), (10). We write, along an extremal,

$$\int_{a_1+s_1}^{1} \int_{a_2+s_2}^{1} A(x,y)u^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left[\int_{a_1}^{1}\int_{a_2}^{1} - \int_{a_1}^{a_1+s_1}\int_{a_2}^{a_2+s_2} - \int_{a_1}^{a_1+s_1}\int_{a_2+s_2}^{1} - \int_{a_1+s_1}^{1}\int_{a_2}^{a_2+s_2}\right] A(x,y)u^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= 1 - s_1 \int_{a_2+s_2}^{1} A(a_1, y)k_1^2(y)\,\mathrm{d}y - s_2 \int_{a_1+s_1}^{1} A(x, a_2)k_2^2(x)\,\mathrm{d}x, \tag{13}$$

$$(a_1 + s_1 \leqslant x \leqslant 1;\ a_2 + s_2 \leqslant y \leqslant 1),\ u(a_1 + s_1, a_2 + s_2) = k + s_1 v_1 + s_2 v_2,$$

$$v_1 = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a_1},\quad v_2 = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=a_2},$$

$$f(a_1, a_2, k_1(y), k_2(x)) =$$

$$= \int_{a_1+s_1}^{1} \int_{a_2+s_2}^{1} \left\{ D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 - 2D(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2\right] \right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y +$$

$$+ s_1 \int_{a_2+s_2}^{1} D(v'_{1x} + v'_{2y})^2 - 2D(1-\nu)(v'_{1x}v'_{2y} - v_{1y}^2)]\mathrm{d}y +$$

$$+ s_2 \int_{a_1+s_1}^{1} [\, D(v''_{1x} + v''_{2y})^2 - 2D(1-\nu)\,(v''_{1x}v''_{2y} - v_{2x}^2)]\mathrm{d}x, \tag{14}$$

$$v'_{1x} = \left.\frac{\partial v_1}{\partial x}\right|_{x=a_1},\quad v_{1y} = \left.\frac{\partial v_1}{\partial y}\right|_{x=a_1},\quad v_{2x} = \left.\frac{\partial v_2}{\partial x}\right|_{y=a_2},\quad v'_{2y} = \left.\frac{\partial v_2}{\partial y}\right|_{x=a_1},$$

$$v''_{1x} = \left.\frac{\partial v_1}{\partial x}\right|_{y=a_2},\quad v''_{2y} = \left.\frac{\partial v_2}{\partial y}\right|_{y=a_2}, \tag{15}$$

to terms in $0(s_1, s_2)$.

We now make the change of variable :

$$(16)\qquad u(x,y)=\left[1-\frac{s_1}{2}\int_{a_2+s_2}^{1}A(a_1,y)\,k_1^2(y)\,dy-\frac{s_2}{2}\int_{a_1+s_1}^{1}A(x,a_2)k_2^2(x)\,dx\right]w(x,y),$$

in order to maintain the condition (14). We then have

$$w(a_1+s_1,a_2+s_2)=k+s_1v_1+s_2v_2+$$

$$(17)\qquad +\frac{ks_1}{2}\int_{a_2+s_2}^{1}A(a_1,y)k_1^2(y)\,dy+\frac{ks_2}{2}\int_{a_1+s_1}^{1}A(x,a_2)k_2^2(x)\,dx,$$

$$f(a_1,a_2,k_1(y),k_2(x))=$$

$$=\int_{a_1+s_1}^{1}\int_{a_2+s_2}^{1}\left\{D\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\right)^2-2D(1-\nu)\left[\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right\}dx\,dy\times$$

$$\times\left(1-\frac{s_1}{2}\int_{a_2+s_2}^{1}A(a_1,y)k_1^2(y)\,dy-\frac{s_2}{2}\int_{a_1+s_1}^{1}A(x,a_2)k_2^2(x)\,dx\right)+$$

$$(18)\qquad +s_1\int_{a_2+s_2}^{1}[D(v'_{1x}+v'_{2y})^2-2D(1-\nu)(v'_{1x}v'_{2y}-v_{1y}^2)\,dy+$$

$$+s_2\int_{a_1+s_1}^{1}[D(v'_{1x}+v'_{2y})^2-2D(1-\nu)(v''_{1x}v''_{2y}-v_{2x}^2)]\,dx,$$

to terms in $0(s_1,s_2)$.

Combining the above results, we obtain the approximate functional equation :

$$f(a_1,a_2,k_1(y),k_2(x))=$$

$$=\min_{v_1,v_2}\left[s_1\int_{a_2+s_2}^{1}[D(v'_{1x}+v'_{2y})^2-2D(1-\nu)(v'_{1x}v'_{2y}-v_{1y}^2)]\,dy+\right.$$

$$(19)\qquad \left.+s_2\int_{a_1+s_1}^{1}D(v''_{1x}+v''_{2y})^2-2D(1-\nu)(v''_{1x}v''_{2y}-v_{2x}^2)]\,dx+\right.$$

$$+\left(1-\frac{s_1}{2}\int_{a_2+s_2}^{1}A(a_1,y)k_1^2(y)\,dy-\frac{s_2}{2}\int_{a_1+s_1}^{1}A(x,a_2)k_2^2(x)\,dx\right)\times$$

$$\times f\left(a_1+s_1,a_2+s_2,k+s_1v_1+\frac{s_1k}{2}\int_{a_2+s_2}^{1}A(a_1,y)k_1^2(y)\,dy,\right. \tag{19}$$

$$\left.k+s_2v_2+\frac{s_2k}{2}\int_{a_1+s_1}^{1}A(x,a_2)k_2^2(x)\,dx\right)+0(s_1,s_2).$$

Letting $s_1\to 0$, and $s_2\to 0$ one obtains the generalized Bellman equations to his new technique concerning the classical variational solution in the form of integro-differential equations with partial derivatives.

In a set of our next Notes the authors will expose new applications of the dynamic programming techniques, developed by D. Mangeron and subsequently by D. Mangeron and M. N. Oğuztöreli [11], [12], to various optimal problems concerning dynamic theory of elasticity of fundamental importance in mechanics, aeronautics, astronautics and building engineering, while in another set of research papers we will deal with applications of the principle of maximum, of the differential dynamic programming a. o.

Received March 21, 1971

Polytechnic Institute, Jassy,
and
Economical Sciences Academy,
„V. I. Lenin", Bucharest

REFERENCES

1. Poteraşu V. F., *Optimization Problems with Applications to the Study of Bars, Plates and Thin Shells*, (in Romanian). Doctoral Dissertation, Polytechnic Institute of Jassy, 1971.
2. Birkhoff G., *Piecewise bicubic interpolation.* In the volume. *Approximations with Special Emphasis on Spline Functions.* Ed. I. J. Schoenberg, Academic Press, New York – London, 1969, 209.
3. Gordon W. J., *Distributive Lattices and Multivariate Functions.* In the volume *Approximations with special Emphasis on Spline Functions.* Ed. I. J. Schoenberg, Academic Press, New York – London, 1969, 236.
4. Камытов Т., Докл. III Сибирской Конф. Мат. и Мех., Томск, 1964, 113—115.
5. Easwaran S., A *Comparison Theorem for Eigenvalues of Mangeron Equations*, Bul. Inst. polit. din Iaşi, XVII (XXI), *3—4*, s. I, 67—71 (1971).
6. Mangeron D., *The Bellman Equations of Dynamic Programming concerning a New Class of Boundary Value Problems with „Total Derivatives"*. J. Math. Anal. a. Appl., 9, *1*, 141—146 (1964).
7. Mangeron D., Oğuztöreli M. N., *Programmazione dinamica concernente equazioni polivibranti.* Rend. Ist. Lombardo, A102, 250—256 (1968).
8. Mangeron D., Oğuztöreli M. N., *Sistemi polivibranti generalizzati ed applicazioni.* Rend. Accad. Naz. Lincei, 2, s. VIII, XLVIII, 96—105 (1970).

9. Mangeron D., Oguztöreli M. N., *Problèmes relatifs aux équations polyvibrantes généralisées*. Bull. Acad. R. Sci. Belgique, 5-e série, LVI, *1*, 30—37 (1970).

10. Oguztöreli M. N., *Time-Lag Control Systems*. Academic Press, New York-London, 1966.

11. Mangeron D., Oguztöreli M. N., Poteraşu V. F., Bul. polit. Inst. din Iaşi, XVII(XXI), *3—4*, s. IV, 1—6 (1971).

12. Mangeron D., Oguztöreli M. N., *Programmation dynamique de certaines classes d'équations polyvibrantes*. C. r. Acad. Sci., Paris, **270 A**, 37—40 (1970).

PROGRAMAREA DINAMICĂ A DETERMINĂRII FRECVENŢEI FUNDAMENTALE DE VIBRAŢIE A PLĂCILOR ELASTICE

(Rezumat)

În recenta teză de doctorat a primului dintre autori [1] au fost dezvoltate diferite tehnici de optimizare şi s-au făcut aplicaţii sistematice la o serie de probleme de inginerie a construcţiilor. În această notă autorii, folosind extinderea la mai multe variable a programării dinamice, efectuată de D. Mangeron cu prilejul studiilor sale referitoare la ecuaţii polivibrante, care îi poartă numele [2], [6], prezintă determinarea, cu ajutorul programării dinamice, a frecvenţei fundamentale de vibraţie a unei plăci elastice.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1—2, 1972
Secţia V
CONSTRUCŢII, ARHITECTURĂ

C. Z. 624 04

MATRICE 4- ŞI 6-DIMENSIONALE, TRIDIAGONALE, ÎN REZOLVAREA STRUCTURILOR PLANE ŞI SPAŢIALE*)

DE

FLORIN MACAVEI şi MARIANA MACAVEI

1. Introducere

Este cunoscută rezolvarea extrem de simplă a sistemelor de ecuaţii pentru care matricea coeficienţilor are un caracter tridiagonal. În calculul structurilor de rezistenţă o astfel de matrice se obţine în rezolvarea grinzii continue (fig. 1), întrucît fiecare necunoscută i este legată numai de necunoscutele vecine, $i-1$ şi $i+1$:

$$K_{ij} \neq 0 \Rightarrow |i-j| \leqslant 1, \tag{1}$$

K_{ij} fiind elementele matricei coeficienţilor sistemului de ecuaţii.

Fig. 1

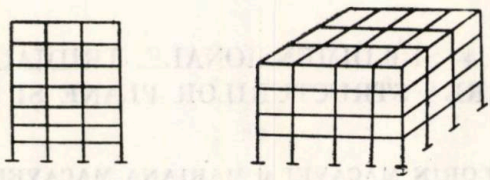
Relaţia (1) poate fi considerată drept definiţie a matricelor tridiagonale.

2. Matrici 4- şi 6-dimensionale, tridiagonale

În rezolvarea, prin metoda deplasărilor, a structurilor plane şi spaţiale la care se ţine seama şi de deformaţiile axiale ale barelor, prin „necunoscute" vom înţelege deplasările unui aceluiaşi nod. Deşi atît pentru sistemele plane cît şi pentru cele spaţiale fiecare necunoscută este legată

*) Prezentată la sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, 2—4 iulie 1970.

numai de cele vecine (adică fiecare nod este legat prin bare numai de nodurile imediat vecine (fig. 2)) ca şi în cazul grinzii continue, totuşi matricea coeficienţilor nu rezultă tridiagonală. Aceasta se datoreşte faptului că în vectorul necunoscutelor şi al termenilor liberi variabilele sînt dispuse liniar (după un singur indice) ceea ce corespunde întru totul structurilor liniare, dar este în contradicţie cu aranjamentul plan, respectiv spaţial al nodurilor în structurile plane, respectiv spaţiale ; se rupe deci graful plan, respectiv spaţial al conexiunilor, impunîndu-se variabilelor o succesiune liniară.



a *b*

Fig. 2

În cele ce urmează se va menţine dispunerea firească a acestora. Sistemul de ecuaţii :

$$[K]\{X\} = \{b\} \tag{2}$$

va deveni :

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} K_{ef}^{ij} X_{ij} = b_{ef}, \quad (e, f) = (1, 1), (1, 2), \ldots, (m, n), \tag{3}$$

pentru structurile plane, şi

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} K_{efh}^{ijk} X_{ijk} = b_{efh}, \quad (e, f, h) = (1, 1, 1), \ldots, (m, n, p), \tag{4}$$

pentru structurile spaţiale.

Matricile $[K]$ 4-dimensionale, respectiv 6-dimensionale din relaţiile (3) respectiv (4) sînt *tridiagonale* deoarece :

$$K_{ef}^{ij} \neq 0 \Rightarrow |i - e| + |j - f| \leqslant 1, \tag{5}$$

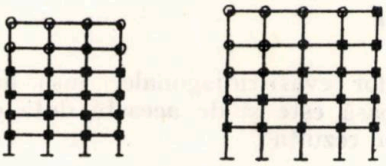
$$K_{efh}^{ijk} \neq 0 \Rightarrow |i - e| + |j - f| + |k - h| \leqslant 1. \tag{6}$$

O matrice $\left[K_{efh}^{ijk}\right]$ are drept transpusă matricea $\left[K_{ijk}^{efh}\right]$. Ea va fi simetrică dacă şi numai dacă este egală cu transpusa sa. Coeficienţii matricei unitate sînt

$$K_{efh}^{ijk} = \begin{cases} 1 \text{ pentru } (i, j, k) = (e, f, h), \\ 0 \text{ pentru } (i, j, k) \neq (e, f, h). \end{cases} \tag{7}$$

3. Rezolvarea structurilor plane

În rezolvarea sistemelor de ecuații pentru care matricea 4- și 6-dimensională este tridiagonală vom folosi metoda utilizată în cazul matricelor tridiagonale obișnuite și anume eliminarea succesivă a necunoscutelor. Forma matricei coeficienților, după o anumită etapă de calcul, depinde de ordinea de eliminare a necunoscutelor. Pentru structurile plane eliminarea poate fi : a) cu prioritatea unui indice (fig. 3 *a*) sau b) canonică (fig. 3 *b*).



a *b*

Fig. 3

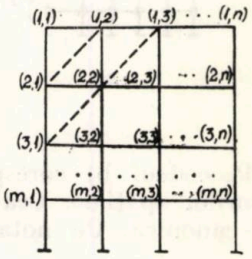


Fig. 4

Primul caz corespunde procedeului matricelor cvasitridiagonale [1], [2]. Cel de al doilea — propus aici — are avantajul unui volum mai redus de calcule. Într-adevăr, reprezentînd rețeaua cu cicluri patrulatere ca un graf cu cicluri pătratice (fig. 4) și notînd ca $d = i + j$ „norma" nodului (i, j), nodurile cu aceeași „normă" sînt situate pe drepte perpendiculare pe bisectoarea (1, 1), (2, 2) ; notînd cu n' numărul nodurilor de pe o dreaptă caracterizată de „norma" d, rezultă :

(8) $$n' = d - 1.$$

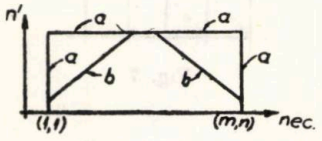
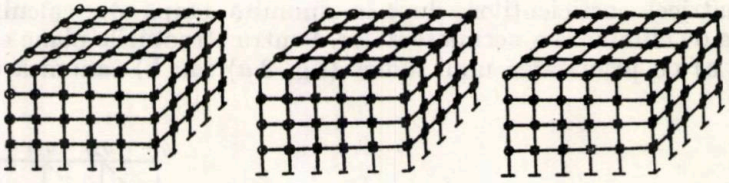


Fig. 5

În fiecare etapă, fiecare necunoscută a unei drepte d este legată numai de necunoscutele dreptei respective. În cazul priorității unui indice necunoscutele care se elimină într-o etapă sînt legate de toate necunoscutele de la nivelul respectiv, al căror număr este egal cu maximul lui n' din eliminarea canonică (fig. 5).

4. Rezolvarea structurilor spaţiale

Pentru structurile spaţiale eliminarea de necunoscute poate fi : a) cu prioritatea unui indice (fig. 6 *a*), b) cu prioritatea a doi indici (fig. 6 *b*), sau c) canonică (fig. 6 *c*).



a *b* *c*

Fig. 6

Procedeul b) corespunde matricelor cvasitridiagonale, însă aplicat structurilor spaţiale. Cea mai avantajoasă este şi de această dată eliminarea canonică. Cu notaţii similare va rezulta :

$$(9) \quad d = i + j + k, \qquad (10)\, n' = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Nodurile cu aceeaşi „normă“ d se află într-un plan perpendicular pe trisectoarea (1, 1, 1,), (2, 2, 2) (fig. 7).

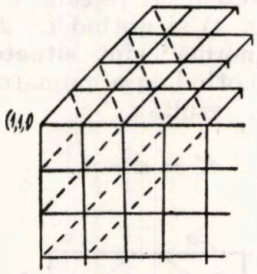


Fig. 7

5. Eliminarea de bandă constantă

În fiecare din procedeele prezentate există un plan de separaţie între nodurile libere şi cele blocate. Acestea pot fi însă întrepătrunse. Se pot alege de aşa manieră nodurile care să se deblocheze încît în fiecare etapă matricea coeficienţilor să aibă o „bandă“ de lăţime constantă.

Pentru o structură plană (fig. 8) în etapa iniţială matricea 4-dimensională este tridiagonală, deoarece sînt satisfăcute condiţiile (5).

În etapa I se elimină necunoscutele reprezentate printr-un cerculeț [3]. Matricea 4-dimensională devine pentadiagonală:

$$K_{ef}^{ij} \neq 0 \Rightarrow |i-e| + |j-f| \leqslant 2. \tag{11}$$

În [4], folosind matrice obișnuite, se elimină în etapa II, odată cu o necunoscută (i, j), cea mai apropiată necunoscută (i_1, j_1) independentă de (i, j) cît și necunoscuta (i_2, j_2), cea mai apropiată și independentă de (i, j) și (i_1, j_1), ș. a. m. d.

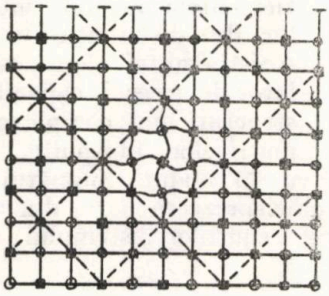


Fig. 8

Se vor elimina în etapa II necunoscutele din centrul pătratelor reprezentate punctat în fig. 8. Matricea 4-dimensională devine 9-diagonală:

$$K_{ef}^{ij} \neq 0 \Rightarrow |i-e| + |j-f| \leqslant 4. \tag{12}$$

În etapa N se elimină necunoscutele din interiorul pătratelor formate din 4 pătrate ale etapei $N-1$. Se obține:

$$K_{ef}^{ij} \neq 0 \Rightarrow |i-e| + |j-f| \leqslant 2^N,$$

deci matricea 4-dimensională devine P-diagonală, unde:

$$P = 2^{N+1} + 1. \tag{14}$$

În ipoteza unui sistem cu un număr mare de noduri, în prima etapă se elimină 1/2 din necunoscute. Din cele rămase, în etapa a doua se elimină 1/4, în a treia 5/12, în a patra 13/28. Cînd N crește numărul necunoscutelor eliminate în etapa N se apropie de 1/2 din cele rămase în urma etapei $N-1$. Într-adevăr, din necunoscutele unui pătrat al etapei N se elimină cele aflate pe cele două linii mijlocii; necunoscutele rămase — cele de pe contur — fac parte din cîte două pătrate, cu excepția vîrfurilor, unde concură 4 pătrate.

Pentru rezolvarea structurilor spațiale se urmează același procedeu, cu mențiunea că pătratele devin cuburi; relațiilor (13) și (15) le corespund

$$K_{efh}^{ijk} \neq 0 \Rightarrow |i-e| + |j-f| + |k-h| \leqslant 2^N, \tag{15}$$

$$P = 2^{N+1} + 1. \tag{16}$$

6. Concluzii

S-a ajuns la concluzia că din punct de vedere al rezolvării, matricele 4- și 6-dimensionale pentadiagonale sînt cazuri particulare ale matricelor tridiagonale, deci prin procedeul prezentat pot fi rezolvate și structurile articulate (fig. 9).

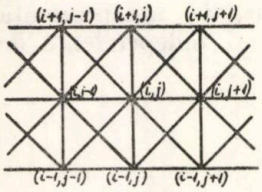


Fig. 9

Unul din avantajele folosirii matricelor 4- și 6-dimensionale tridiagonale este acela că în memoria calculatorului se înregistrează numai elementele nenule, întrucît se cunoaște legea lor de distribuție în matricea coeficienților. Acest avantaj oferă posibilitatea ca la un calculator de aceeași capacitate să se poată rezolva structuri mai complexe decît în cazul utilizării matricelor obișnuite. De exemplu, pentru o structură plană (fig. 2 *a*) cu 75 noduri, numărul coeficienților diferiți de zero reprezintă numai a cincisprezecea parte din numărul total al acestora. Este esențial nu numărul ecuațiilor sistemului ci numai numărul coeficienților nenuli.

Primită la 4 iulie 1971

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de statică și rezistența materialelor

BIBLIOGRAFIE

1. Derez G., Müller R., *Calcul des structures par division en sousstructures.* Construction Metallique, *2* (1968).
2. Gatewood B., Ohanian N., *Tridiagonal Matrix Method for Complex Structures.* J. Structural Division, ASCE, **91**, *ST 2* (1965).
3. Șesan A., *Number Reduction of Unknowns in Slope Deflexion Method.* Bul. Inst. polit. Iași, IV (VIII), *3—4* (1958).
4. Vulpe A., Macavei F., *The Unitary Form of Simplifications in the Matrix Solving of the Space Structures.* A II-a Conferință de Mecanică Tehnică, Buc., 89—98 (1970).
5. Berge C., *Teoria grafurilor și aplicațiile ei,* (trad. din l. franc.). Ed. tehn., Buc., 1969.

TRIDIAGONAL 4- AND 6-DIMENSIONAL MATRICES, ÎN SOLVING THE PLANE AND SPACE STRUCTURES

(Summary)

In solving the structures by stiffness method — taking into account the axial deformations — the joint displacements produce forces only at that joint and the direct to him connected joints. This implies that arranging the unknown and known vectors as bidimensional matrix for the plane structures and tridimensional matrix for the space ones, the 4-dimensional and respectively 6-dimensional coefficient matrix are *tridiagonal-ones.* So that is possible to register and to handle in computer only with the elements which differ from zero ; this is of great importance because the number of these coefficients is less than about 1/10 of the coefficients which vanishes.

There are presented some kinds of solving the plane and space structures.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1—2, 1972
Secția V
CONSTRUCȚII, ARHITECTURĂ

C. Z. 624.1; 539.3

TENSIUNI ȘI DEPLASĂRI ÎNTR-UN SEMISPAȚIU ELASTIC OMOGEN ȘI TRANSVERSAL ANIZOTROP, ACȚIONAT DE UN MOMENT UNIFORM DISTRIBUIT ÎN LUNGUL UNEI AXE PE PLANUL DE SEPARAȚIE

DE

IOANA MISSIR și AL. EFTIMIE

1. Introducere

Ecuațiile fizice pentru un mediu elastic, omogen și transversal anizotrop, au forma:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_H}(\sigma_x - \nu_1\sigma_y) - \frac{\nu_3}{E_V}\sigma_z, \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E_H}(\sigma_y - \nu_1\sigma_z) - \frac{\nu_3}{E_V}\sigma_z,$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_V}\sigma_z - \frac{\nu_2}{E_H}(\sigma_x + \sigma_y), \qquad \tau_{zx} = G_1\gamma_{zx} = \frac{E_V\nu_2}{\nu_2 + \nu_3 + 2\nu_2\nu_3}\gamma_{zx},$$

$$\tau_{zy} = G_z\gamma_{zy} = \frac{E_V\nu_2}{\nu_2 + \nu_3 + 2\nu_2\nu_3}\gamma_{zy}, \quad \tau_{xy} = G_3\gamma_{xy} = \frac{E_H}{2(1+\nu_1)}\gamma_{xy}.$$

Între cele opt constante elastice există relațiile:

$$\frac{E_H}{E_V} = \frac{\nu_2}{\nu_3} = n \qquad G_3 = \frac{E_H}{2(1+\nu_1)}.$$

La unele categorii de pământuri, experiența [1] a arătat că $G_1 \approx G_2 \approx G_3 \approx G$ și această aproximație a condus [2] la relația:

$$G = \frac{E_V\nu_2}{\nu_2 + \nu_3 + 2\nu_2\nu_3}.$$

Un mediu elastic omogen, transversal anizotrop (argile supraconsolidate) poate fi caracterizat de cinci constante elastice independente (modulii de elasticitate E_H şi E_V, precum şi trei valori, ν_1, ν_2, ν_3, pentru coeficienţii lui Poisson definiţi în [2]).

În această lucrare se vor stabili expresiile tensiunilor şi deplasărilor pentru cazul în care semispaţiul este acţionat de un moment uniform repartizat în lungul unei axe pe planul de separaţie (fig. 1 *a*).

2. Calculul tensiunilor

Se aplică principiul suprapunerii efectelor, pornind de la rezultatele obţinute în cazul cînd semispaţiul transversal anizotrop este acţionat de o forţă verticală uniform repartizată în lungul unei axe pe suprafaţa de separaţie [3]. În acest scop se consideră cuplul $m = \lim_{\substack{d\to 0\\ p\to\infty}} pd$ (fig. 1 *b*).

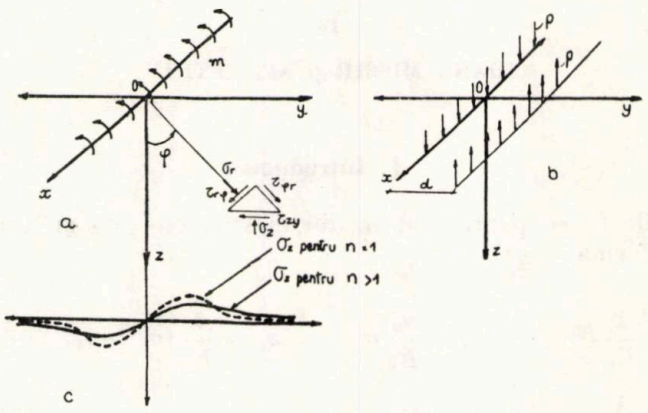


Fig. 1

Fie $F(z, y)$ funcţia de tensiuni relativă la forţa p distribuită uniform pe axa Ox, $F(z, y + d)$ funcţia de tensiuni relativă la forţa p distribuită uniform pe o axă paralelă cu Ox şi la distanţa d de aceasta, $\psi(z, y)$ funcţia de tensiuni relativă la cazul încărcării cu un cuplu distribuit în lungul axei Ox pe suprafaţa de separaţie.

Pentru $d \to 0$, $p \to \infty$ şi $pd \to m$ se poate scrie:

$$\psi(z, y) = \lim_{\substack{d\to 0\\ p\to\infty}} [F(z, y) - F(z, y + d)] = \lim_{\substack{d\to 0\\ p\to\infty}} \left[- d \frac{F(z, y + d) - F(z, y)}{d} \right]$$

sau

$$\psi(z, y) = - \lim_{\substack{d\to 0\\ p\to\infty}} \left[d \frac{\partial F(z, y)}{\partial y} \right].$$

Din [2] rezultă :

$$\frac{\partial F(z, y)}{\partial y} = -\frac{p}{(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})} \cdot \frac{1}{\pi}\left[\sqrt{\alpha}\,\mathrm{arctg}\frac{z}{y\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\beta}\,\mathrm{arctg}\frac{z}{y\sqrt{\beta}}\right].$$

Coeficienții α și β se pot determina [2] din relațiile aproximative :

$$\alpha + \beta = \frac{1 + n - 2\nu_1\nu_2}{n - \nu_2^2}, \qquad \alpha\beta = \frac{1 - \nu_1^2}{n - \nu_2^2}.$$

Urmează deci :

$$\psi(z, y) = -\lim_{\substack{d\to 0\\ p\to\infty}} \frac{pd}{\pi} \cdot \frac{1}{(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})}\left[\sqrt{\alpha}\,\mathrm{arctg}\frac{z}{y\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\beta}\,\mathrm{arctg}\frac{z}{y\sqrt{\beta}}\right] = \tag{1}$$

$$= \frac{m}{\pi(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})}\left[\sqrt{\alpha}\,\mathrm{arctg}\frac{z}{y\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\beta}\,\mathrm{arctg}\frac{z}{y\sqrt{\beta}}\right].$$

Expresiile tensiunilor rezultă sub forma :

$$\begin{cases} \sigma_z = \dfrac{\partial^2\psi(z, y)}{\partial y^2} = \dfrac{2m(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{\pi} z^3 y \dfrac{[z^2(\alpha + \beta) + 2y^2\alpha\beta]}{(\alpha y^2 + z^2)^2(\beta y^2 + z^2)^2}, \\ \sigma_y = \dfrac{\partial^2\psi(z, y)}{\partial z^2} = \dfrac{2m(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{\pi} zy \dfrac{y^4\alpha\beta - z^4}{(\alpha y^2 + z^2)^2(\beta y^2 + z^2)^2}, \\ \tau_{zy} = -\dfrac{\partial^2\psi(z, y)}{\partial z\partial y} = \dfrac{m(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})}{\pi} z^2 \dfrac{[3\alpha\beta y^4 + z^2y^2(\alpha + \beta) - z^4]}{(\alpha y^2 + z^2)^2(\beta y^2 + z^2)^2}. \end{cases} \tag{2}$$

În cazul ipotezei mediului izotrop $n = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu$, pentru care rezultă $\alpha = \beta = 1$, astfel că formulele (2) conduc la soluția cunoscută [3].

Se verifică ușor că expresiile stabilite pentru tensiuni satisfac următoarele condiții la limită :

$$\sigma_z = \tau_{yz} = 0 \text{ pentru } z = 0; \quad \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \text{ pentru } z \to \infty.$$

În coordonate polare soluțiile au forma :

$$\psi(\varphi) = \frac{m}{\pi(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})}\left(\sqrt{\alpha}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{\alpha}\,\mathrm{tg}\,\varphi} - \sqrt{\beta}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{\beta}\,\mathrm{tg}\,\varphi}\right), \tag{3}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \sigma_r = \dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{\partial^2\psi(\varphi)}{\partial\varphi^2} = \dfrac{2m\,\mathrm{tg}\varphi}{\pi}\cdot\dfrac{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{r^2\cos^2\varphi}\cdot\dfrac{(\alpha+\beta-1+2\alpha\beta\,\mathrm{tg}^2\varphi+\alpha\beta\,\mathrm{tg}^4\varphi)}{(\alpha\,\mathrm{tg}^2\varphi+1)^2(\beta\mathrm{tg}^2\varphi+1)^2}, \\ \sigma_\varphi = \dfrac{\partial^2\psi(\varphi)}{\partial r^2} = 0, \\ \tau_{r\varphi} = \dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{\partial^2\psi(\varphi)}{\partial\varphi^2} = \dfrac{m(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{\pi r^2\cos^2\varphi(\alpha\,\mathrm{tg}^2\varphi+1)(\beta\,\mathrm{tg}^2\varphi+1)}. \end{cases}$$

Expresiile eforturilor unitare satisfac condiţiile la limită :

$$\sigma_r \to 0,\ \tau_{r\varphi} \to 0 \text{ pentru } r \to \infty \text{ şi } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tau_{r\varphi} r^2\,\mathrm{d}\varphi = m.$$

3. Calculul deplasărilor

Deoarece expresiile tensiunilor stabilite în § 2 satisfac condiţia de compatibilitate a deformaţiilor, se pot determina deplasările punctelor din ecuaţiile geometrice :

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y \quad \text{şi} \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z.$$

Ţinînd seama de ecuaţiile fizice, rezultă următoarele expresii pentru deplasarea orizontală şi respectiv verticală a punctelor :

$$(5)\quad \begin{cases} E_V v = \int \varepsilon_y\,\mathrm{d}y + f_1(z) = \dfrac{m(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(1+\nu_1)}{n\pi}\cdot\dfrac{z^3\nu_2 - y^2z(1-\nu_1)}{(\alpha y^2+z^2)(\beta y^2+z^2)} + f_1(z), \\ E_V w = \int \varepsilon_z\,\mathrm{d}z + f_2(y) = \dfrac{m(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{n\pi}\cdot\dfrac{-(1-\nu_1)y^3 - z^3y[\nu_2(1-\nu_1)+1+n]}{(\alpha y^2+z^2)(\beta y^2+z^2)} + \\ \qquad\qquad + f_2(y), \end{cases}$$

în care constantele de integrare $f_1(z)$ şi $f_2(y)$ urmează să fie determinate din condiţia :

$$\gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{zy}}{E_V}\cdot\frac{\nu_2+\nu_3+2\nu_2\nu_3}{\nu_2}.$$

Efectuînd derivatele și sumîndu-le se obține :

$$E_V\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\frac{\nu_2+\nu_3+2\nu_2\nu_3}{\nu_2}\cdot\frac{m(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{n\pi}\cdot\frac{3\alpha\beta y^4z^2+z^2y^2(\alpha+\beta)-z^6}{(\alpha y^2+z)^2(\beta y^2+z^2)^2}+$$

$$+\frac{df_1(z)}{dz}+\frac{df_2(y)}{dy},$$

de unde rezultă

$$\frac{df_1(z)}{dz}+\frac{df_2(y)}{dy}=0. \tag{6}$$

Din motive de antisimetrie, pentru $y=0$ trebuie ca $w=0$ și din (5) rezultă $f_2(y)=0$. Impunînd condiția $v=0$ pentru $y=d$ și $z=0$ rezultă $f_1(z)=0$.

Deci expresiile deplasărilor au forma :

$$\begin{cases} E_Vv=\dfrac{m(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(1+\nu_1)}{n\pi}\cdot\dfrac{z^3\nu_2-y^2z(1-\nu_1)}{(\alpha y^2+z^2)(\beta y^2+z^2)}, \\ E_Vw=\dfrac{m(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{n\pi}\cdot\dfrac{(\nu_1^2-1)y^3-z^2y[\nu_2(1-\nu_1)+1+n]}{(\alpha y^2+z^2)(\beta y^2+z^2)}. \end{cases} \tag{7}$$

Pentru $z=0$ se obține expresia deplasării punctelor planului de separație :

$$v_{(y=y_0,\,z=0)}=0,\quad w_{(y=y_0,\,z=0)}=-\frac{m(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(1-\nu_2\nu_3)}{\pi E_V y_0}. \tag{8}$$

Se observă că pentru $n=1$ și $\nu_1=\nu_2=\nu_3=\nu$, expresiile (8) devin :

$$v_{(y=y_0,\,z=0)}=0,\quad w_{(y=y_0,\,z=0)}=-\frac{2m(1-\nu^2)}{\pi E}\cdot\frac{1}{y_0},$$

adică soluția cunoscută în ipoteza mediului elastic, omogen și izotrop.

Se constată deci că deplasarea verticală a punctelor planului de separație în ipoteza semispațiului elastic, omogen și trasversal anizotrop. se poate obține multiplicînd expresia deplasării verticale a punctelor planului de separație a semispațiului elastic izotrop, cu factorul :

$$C=\frac{(1-\nu_2\nu_3)(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{2(1-\nu^2)}, \tag{9}$$

care depinde numai de caracteristicile elastice ale mediului.

Pentru rapoarte $E_H/E_V=n>1$, factorul C dat de (9) este subunitar, iar pentru $n<1$, C este supraunitar.

4. Concluzii

Calculul analitic arată că anizotropia transversală produce o împrăștiere laterală, mai mare sau mai mică, a tensiunilor, după cum $n \gtrless 1$, în raport cu valorile date de ipoteza semispațiului elastic omogen și izotrop. În consecință și deplasările verticale ale punctelor vor fi mai mici sau mai mari față de soluția izotropă, diferența fiind funcție în special de mărimea raportului $E_H/E_V = n$.

Neluarea în considerație a influenței anizotropiei asupra stării de tensiuni și a deplasărilor la unele terenuri de fundație poate constitui una din cauzele neconcordanței dintre tasările calculate și cele măsurate.

Primită la 29 iunie 1970

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de geotehnică și fundații

BIBLIOGRAFIE

1. Роганкина Е. Ж., *Влияние анизотропности глинистых грунтов на их физико-механические свойства.* Основания, фундаменты и механика грунтов, *1* (1967).
2. Eftimie Al., *Contribuții la studiul stării de tensiuni, a deplasărilor și deformațiilor în terenuri de fundație anizotrope și neomogen elastice.* Teză de doctorat, Inst. polit. Iași, 1971.
3. Eftimie Al., *État de tension d'un terrain de fondation à anisotropie transversale au cas du problème plan.* Bul. Inst. polit. Iași, XI (XVIII), *3—4*, 603—612 (1968).

STRESSES AND DISPLACEMENTS IN AN ELASTIC HOMOGENOUS AND CROSS ANISOTROPIC HALF SPACE ACTED BY AN UNIFORM DISTRIBUTED-ON AN AXIS-MOMENT

(Summary)

The paper presents the stress and displacement distribution analysis in an elastic homogenous anisotropic half-space, acted by an uniform distributed-on an axis-of the limit plane moment.

The authors use the obtained results by the stress and displacement analysis for an elastic homogenous and anisotropic half-space, acted by an uniform distributed load [2]. Taking into account the cross anisotropy, a stress dissipation is obtained as function of the ratio $n = E_V/E_H$.

Thus, the point displacements, as well as the settlements, will be smaller than those of an isotropical half-space assumption.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1—2, 1972
Secția V
CONSTRUCȚII, ARHITECTURĂ

D. K. 624.07; 539.4

THEORETISCHE UND EXPERIMENTELLE BESTIMMUNG DER SCHNITTKRÄFTE UND EINFLUSSFLÄCHEN EINER ALLSEITIG FREI DREHBAR GELAGERTEN TRAPEZPLATTE *)

VON

V. ILLE, HORST MÜHSAM, VIOREL POP und I. MAGYAROSY

1. Die Schwierigkeiten, welche bei der Integrierung der Plattengleichung für kompliziertere Plattenformen auftreten, haben in letzter Zeit die Anwendung von Näherungsverfahren bedingt. Sowohl die dadurch eingeführten Ungenauigkeiten, als auch der hohe Zeitaufwand bei der Durchführung der Rechnung empfehlen die Modellversuche zwecks Ergänzung oder unter Umständen als selbständigen Bestimmungsmodus der Schittgrössen.

Im folgenden wird ein für die modellstatische Untersuchung beliebig geformter und gelagerter Platten besonders geeignetes Verfahren beschrieben.

2. Zur Bestimmung der Durchbiegung $w(x, y)$ der Trapezplatte wird ein Variationsverfahren nach K a n t o r o w i t s c h [1] für die Integrierung der Plattengleichung benützt [2]:

$$\nabla^2 \mathcal{M} = -p, \quad \nabla^2 w = -\frac{\mathcal{M}}{P}, \tag{1}$$

worin $\mathcal{M}=(M_x + M_y)/(1+\mu)$, w — die Durchbiegung eines Plattenpunktes, p — die Lastintensität und D — die Plattensteifigkeit bedeuten.

Der Ausdruck für $w(x, y)$ wurde für die gleichschenklige, frei drehbar gelagerte Trapezplatte unter gleichförmiger Belastung bestimmt (Abb. 1). Die Lösungen $\mathcal{M}(x, y)$ und $w(x, y)$ genügen näherungsweise in Variationsform den Gleichungen (1) und haben folgende Ausdrücke [2]:

$$\mathcal{M}(x,y) = (x^4 - 6k^2x^2y^2 + 5k^4y^4)\left(C_1 y^{n_1} + C_2 y^{n_2} - \frac{651}{124k^2} \cdot \frac{p}{-51+55k^2} \cdot \frac{1}{y^2}\right), \tag{2}$$

*) Mitgeteilt an der wissenschaftlichen Tagung der Technische Hochschule, Jassy, den 2.—4. Juli 1970.

$$w(x,y) = (x^4 - 6k^2x^2y^2 + 5k^4y^4)\left[\left(C_3 - \frac{C_1}{4D(n_1+5)}y^2\right)y^{n_1} + \right.$$

(3)

$$\left. + \left(C_4 - \frac{C_2}{4D(n_2+5)}y^2\right)y^{n_2} + \frac{217}{6D}\cdot\frac{p}{5\,555k^4 - 6\,086k^2 + 867}\right],$$

worin

(4)
$$n_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 - \frac{9}{64\,k^2}(-17 + 101\,k^2)}.$$

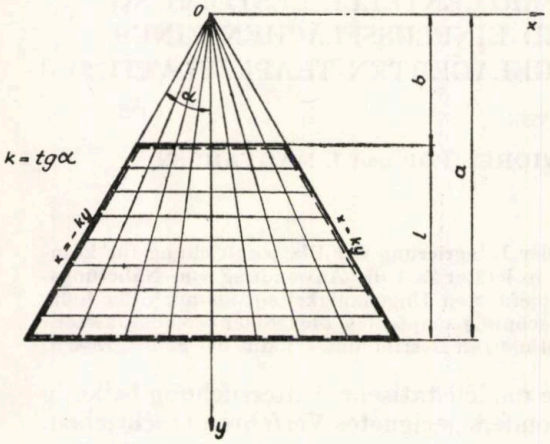


Abb.1. — Die allseitig frei drehbar gelagerte Trapezplatte.

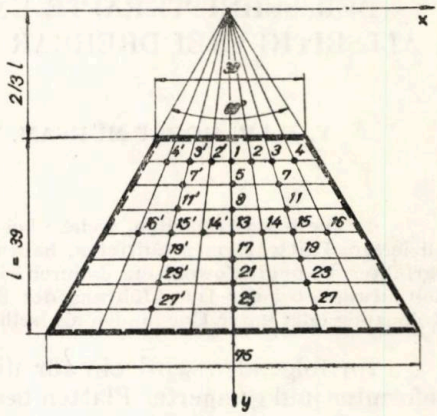


Abb. 2. — Die Abmessungen der Trapezplatte.

Zur Bestimmung der Beiwerte C_1, C_2, C_3 und C_4 werden die Randbedingungen $\mathcal{M} = 0$, $w = 0$ für $y = b$ und $y = a$ angeschrieben. Die berechnete Platte hat den Konstruktionswinkel $\alpha = 30°$, $a = 5l/3$ und $b = 2\,l/3$.

3. Die modellstatische Bestimmung der Biege- und Drillmomente wurde anhand einer 5 mm dicken Glasplatte (Abb. 2) durchgeführt. Glas als Modellwerkstoff besitzt die Vorteile eines verhältnismässig geringen Elastizitätsmoduls ($E = 0{,}77.10^6 \text{kp/cm}^2$) und eines strengelastischen Verhaltens im Nutzbereich.

Die Grundlage bei der Ermittlung der Momente bilden Krümmungsmessungen, wobei die verwendeten Geräte (Abb. 3 und 4) die Krümmungen zweier senkrecht zueinander liegenden Richtungen selbsttätig überlagern. Die Messlänge wurde 40 mm gewählt, wobei die Biegelinie in Messrichtung als quadratische Parabel angenommen wird.

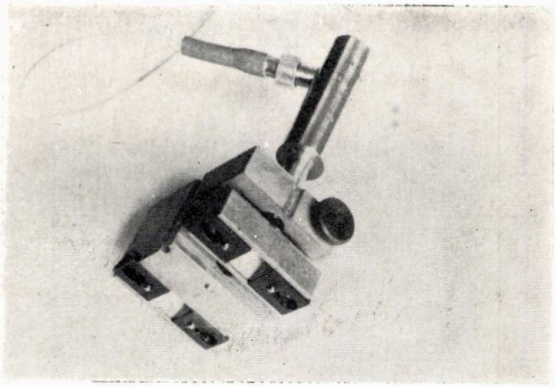


Abb. 3. — Gerät zur Messung der Biegemente m_x und m_y.

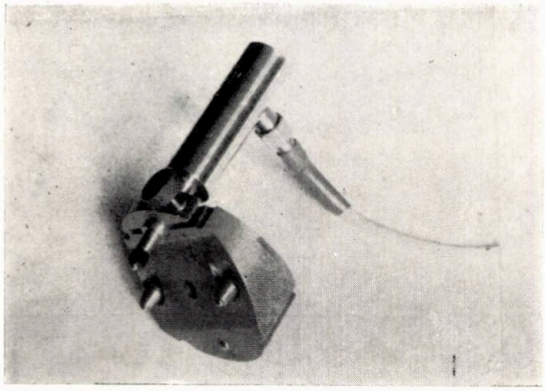


Abb. 4. — Gerät zur Messung der Drillmomente m_{xy}.

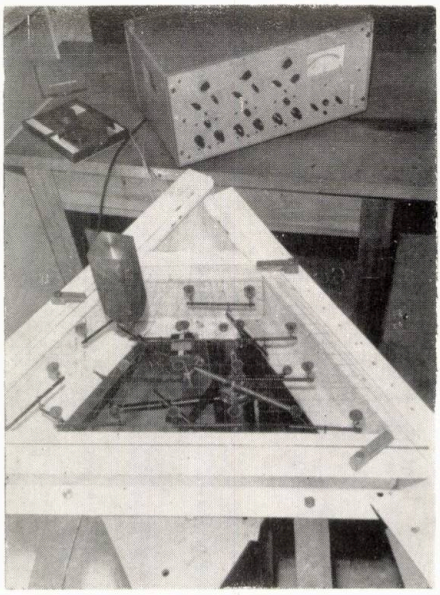


Abb. 5. – Prüfstand.

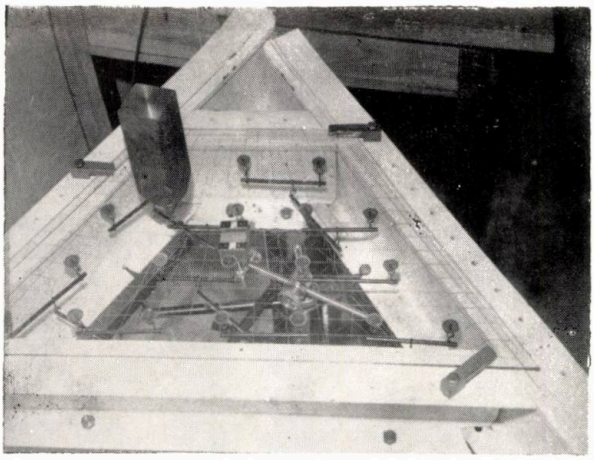


Abb. 8. — Versuchsanordnung zur Aufnahme der Einlussflächen.

Die Scheitelhöhe wird mittels eines induktiven Gebers vom Typ IWT 102, angeschlossen an eine Messbrücke vom Typ UM 131, gemessen.

Die frei drehbare Lagerung der Platte wird durch die Auflagerschneiden des Prüfstandes (Abb. 5) gegeben und die Platte gegen Verschiebung mittels Klemmen gesichert.

Die Belastung wurde für den Fall „Gleichflächenlast" durch Gehänge auf eine genügend grosse Anzahl Einzelpunkte verteilt.

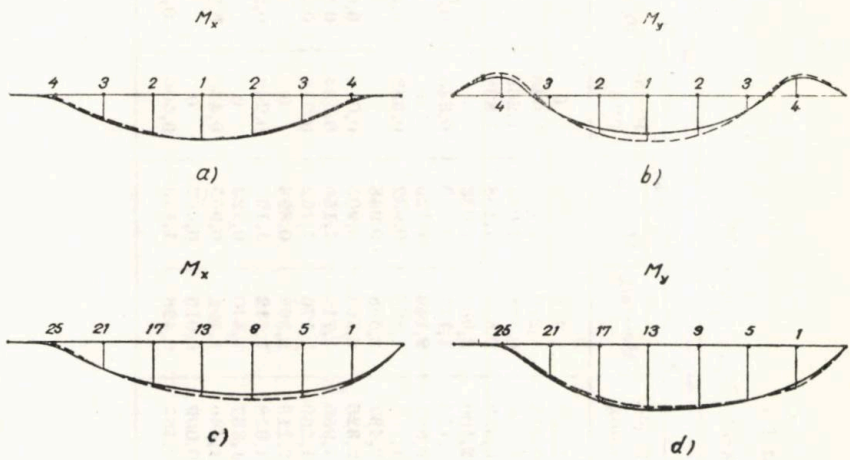


Abb. 6. — Graphische Darstellung der Biegemomente m_x und m_y.

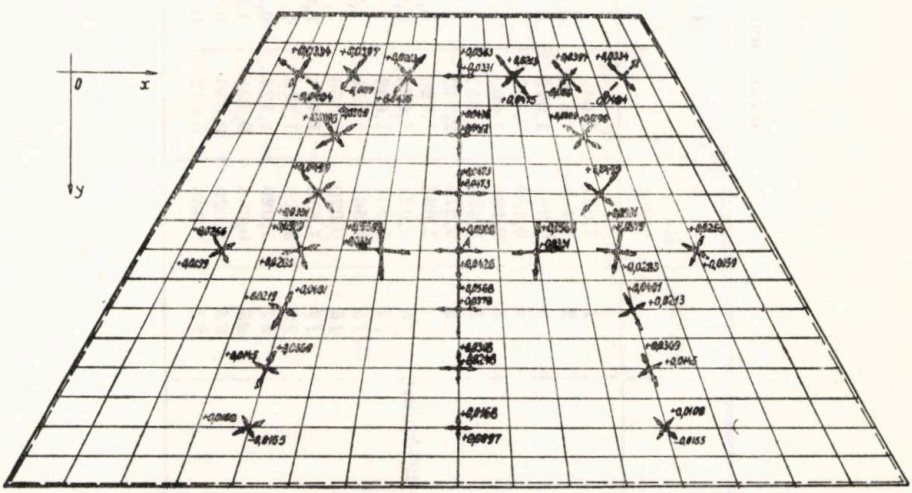


Abb. 7. — Gemessene Hauptmomente aus Gleichflächenlast.

Tafel 1

Biege- und Drillmomente M_x, M_y und M_{xy}

Last	Punkte	M_x		$\frac{M_{x\text{Rechn.}}}{M_{x\text{Mess.}}}$	M_y		$\frac{M_{y\text{Rechn.}}}{M_{y\text{Mess.}}}$	M_{xy}		$\frac{M_{xy\text{Rechn.}}}{M_{\text{Mess.}}}$
		Rechnung	Messung		Rechnung	Messung		Rechnung	Messung	
	1	1,657	1,642	1,009	1,760	1,498	1,174	0	0	0
	2	1,484	1,642	0,903	1,418	1,270	1,116	0,646	0,668	0,967
	3	0,998	1,070	0,933	0,449	0,428	1,049	1,265	1,101	1,149
	4	0,199	0,169	1,171	0,983	0,849	1,158	1,830	1,780	1,028
	5	2,130	1,800	1,182	2,100	2,033	1,033	0	0	0
	7	1,471	1,340	1,097	1,154	1,177	0,980	0,343	0,335	1,023
	9	2,215	2,140	1,035	2,397	2,140	1,120	0	0	0
	11	1,633	1,726	0,946	1,703	1,826	0,932	0,389	0,376	1,034
$p = 297$ kp/m²	*13*	2,021	1,926	1,049	2,437	2,568	0,948	0	0	0
	14	1,907	1,698	1,123	2,326	2,568	0,905	0,014	0,015	0,933
	15	1,561	1,384	1,127	1,980	1,712	1,156	0,034	0,033	1,030
	16	0,972	0,856	1,136	1,360	1,170	1,162	0,216	0,233	0,927
	17	1,613	1,712	0,942	2,115	2,368	0,893	0	0	0
	19	1,309	1,170	1,118	1,918	1,712	1,120	0,247	0,250	0,988
	21	1,028	1,124	0,915	1,337	1,440	0,923	0	0	0
	23	0,904	0,828	1,092	1,446	1,498	0,965	0,436	0,382	1,141
	25	0,029	0,040	0,725	0,009	0,013	0,692	0	0	0
	27	0,036	0,043	0,837	0,485	0,428	1,133	0,506	0,501	1,009

Tafel 2

Hauptommente M_1 und M_2

Last	Punkte	M_1		$\frac{M_{1\text{Rechn.}}}{M_{1\text{Mess.}}}$	M_2		$\frac{M_{2\text{Rechn.}}}{M_{2\text{Mess.}}}$	Winkel	
		Rechnung	Messung		Rechnung	Messung		Rechnung	Messung
	1	1,760	1,642	1,071	1,657	1,498	1,106	0	0
	2	2,098	2,149	0,976	0,804	0,963	0,834	43°32′	37°14′
	3	2,019	1,796	1,124	− 0,571	− 0,498	1,146	38°52′	36°51′
	4	1,531	1,511	1,013	− 2,316	− 2,191	1,057	36° 3′	37° 4′
	5	2,130	1,971	1,080	2,100	1,862	1,127	0	0
	7	1,688	1,629	1,036	0,932	0,887	1,050	32°35′	38°14′
	9	2,397	2,140	1,120	2,215	2,140	1,035	0	0
$p = 297$ kp/m²	*11*	2,060	2,255	0,913	1,276	1,497	0,852	− 42°38′	− 40°26′
	13	2,437	2,568	0,948	2,021	1,926	1,049	0	0
	14	2,326	2,568	0,905	1,906	1,497	1,273	2° 2′	1°
	15	1,983	1,714	1,156	1,558	1,281	1,216	− 4°47′	− 5°40′
	16	1,457	1,203	1,211	0,875	0,722	1,211	− 24° 5′	− 28° 2′
	17	2,115	2,568	0,823	1,613	1,712	0,942	0	0
	19	2,006	1,816	1,104	1,221	0,965	1,265	18°33′	21°14′
	21	1,337	1,440	0,928	1,028	1,121	0,917	0	0
	23	1,689	1,670	1,011	0,661	0,656	1,007	29° 6′	24°23′
	27	0,597	0,488	1,223	− 0,721	− 0,702	1,027	− 25° 3′	− 32°37′

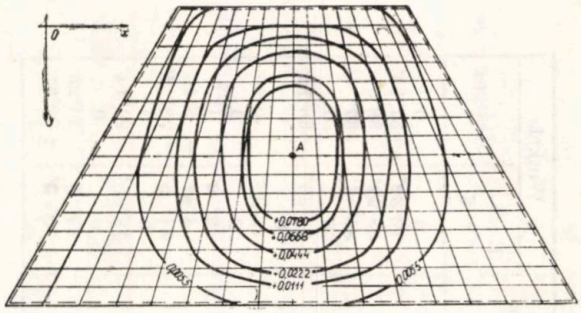


Abb. 9. — Einflussfläche m_x für Punkt A.

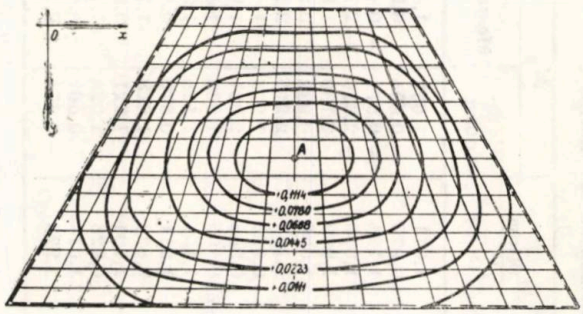


Abb. 10. — Einflussfläche m_y für Punkt A.

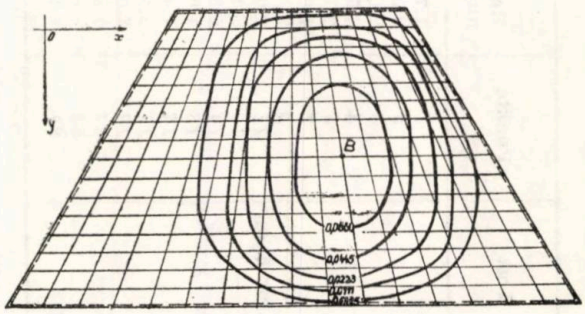


Abb. 11. — Einflussfläche m_x für Punkt B.

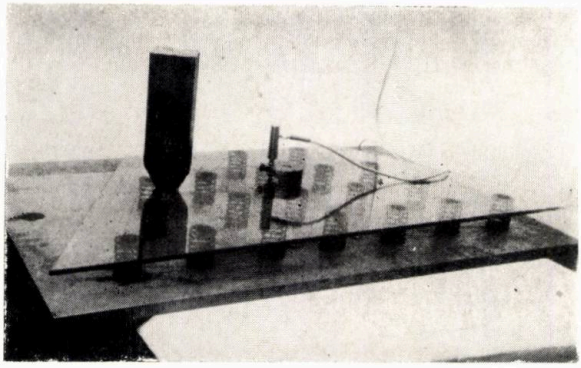


Abb. 15. — Die Trapezplatte auf elastischer Unterlage.

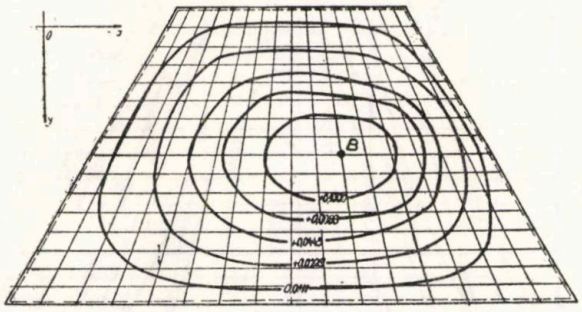
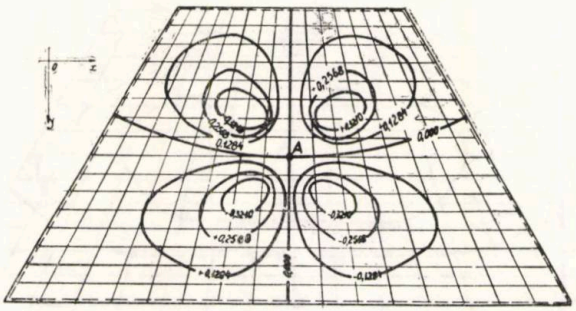


Abb. 12. — Einflussfläche m_y für Punkt B.



Ab. 13. — Einflussfläche m_{xy} für Punkt A.

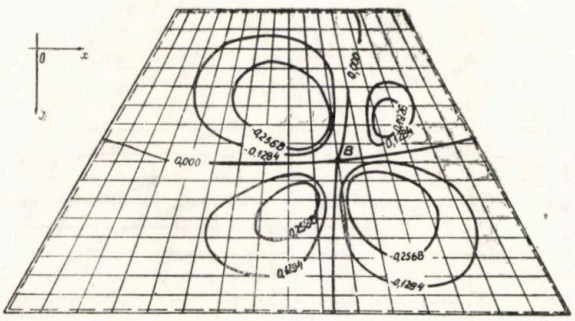


Abb. 15. — Einflussfläche m_{xy} für Punkt B.

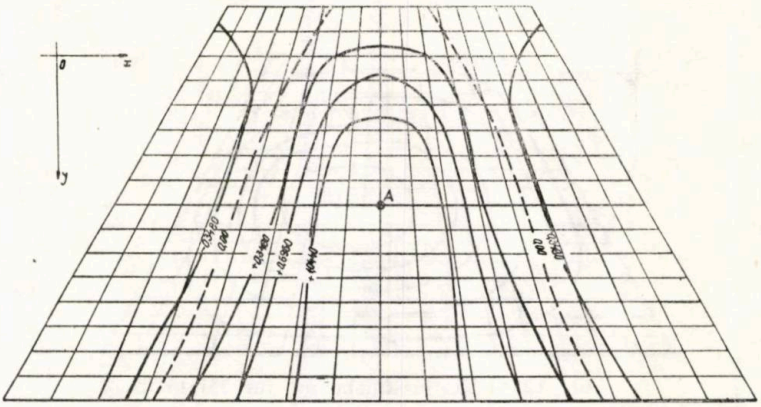


Abb. 16. — Einflussfläche m_x für Punkt A der Trapezplatte auf elastischer **Unterlage.**

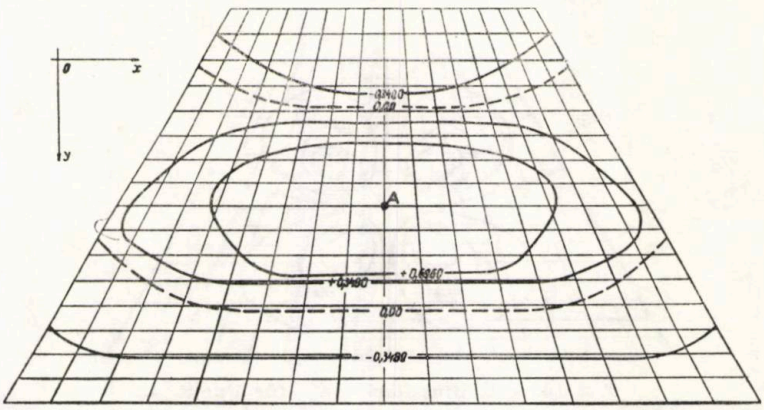


Abb. 17. — **Einflussfläche** m_y für Punkt A der **Trapezplatte auf elastischer** Unterlage.

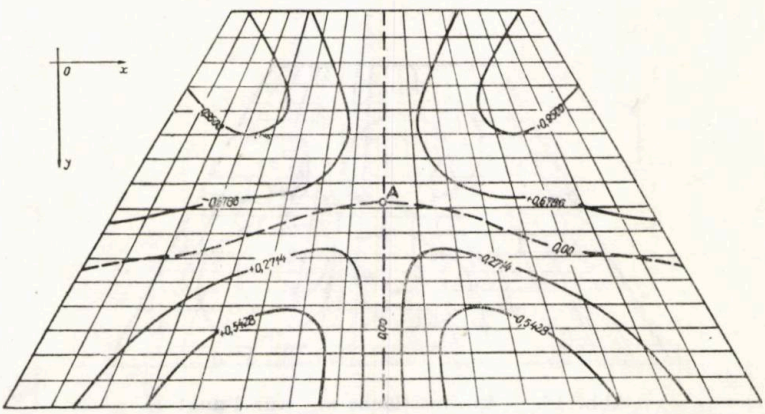


Abb. 18. — Einflussfläche m_{xy} für **Punkt** A der **Trapezplatte auf elastischer Unterlage.**

4. Die Rechnungs- und Messergebnisse vorliegender Arbeit beziehen sich sowohl auf die Hauptmomente infolge gleichmässiger Flächenlast, als auch auf die Einflussflächen der Momente für einige Plattenpunkte. In Abb. 6 sind die Biegemomente M_x und M_y in einigen Schnitten graphisch dargestellt, während in Tafel 1 und 2 die Rechnungs- und Messwerte der wichtigsten Plattenpunkte angegeben sind. Eine Zusammenstellung der experimentell gefundenen Hauptmomente für Gleichlast zeigt Abb. 7, und es ist ersichtlich, dass sie sehr gut mit der Rechnungsergebnissen übereinstimmen.

Die Einflussflächen der Momente sind als Schichtlinienpläne dargestellt. Die Schichtlinien wurde mit Hilfe einer Wanderlast von 5 kp bei festem Standpunkt des Messgerätes aufgenommen (Abb. 8). Die Einflussflächen der Biegemomente m_x und m_y für den Punkt A sind in Abb. 9 und 10, für den Punkt B in Abb. 11 und 12 dargestellt. Für die gleichen Punkte sind die Einflussflächen des Drillmomentes m_{xy} aus Abb. 13 und 14 ersichtlich.

Dieselbe Trapezplatte wurde nun elastich gelagert (Abb. 15) und die Einflussflächen der Momente für den Plattenmittelpunkt aufgenommen (Abb. 16...18). Die elastische Lagerung wurde mit Hilfe von Druckfedern erzielt, mit der Federkonstante $C = 10$ kp/cm und einer Bettungsziffer von $k = 1{,}16$ kp/cm^3.

5. Der Vergleich zwischen Rechnung und Messung der Hauptmomente fällt sehr günstig aus und es bestehen keine groben Abweichungen zwischen den Ergebnissen beider Verfahren, Die beschriebene modellstatische Untersuchung lässt sich leicht durchführen und ist durch die Benützung der induktiven Wegaufnehmer sehr genau. Es ist weiterhin ersichtlich, dass die Platte zur stumpfen Ecke abträgt, was durch die Existenz in deren Umgebung von grossen Biegemomenten bewiesen wird. In der Nähe der spitzen Ecken sind die Momente bedeutend kleiner.

Die Einflussflächen der Momente für den Plattenmittelpunkt sind symmetrisch für m_x und m_y und antisymmetrisch für m_{xy}. Die eingetragenen Werte auf den Schichlinien entsprechen einer Wanderlast von 1 kg.

Die sehr gute Übereinstimmung zwischen Rechnungs-und Messergebnissen bestätigt sowohl die Gültigkeit der verwendeten Variationsmethode als auch der experimentellen Untersuchung, welche in dieser Form für beliebig geformte und belastete Platten mit Erfolg angewendet werden kann.

Eingegangen am 3. Juli 1970

Technische Hochschule, Cluj

LITERATURVERZEICHNIS

1. Ille V., Bârsan G., Magyarosy I., *Cercetări experimentale asupra unei plăci trapezoidale, simplu rezemată pe contur.* Bul. şt. Inst. polit. Cluj, *13* (1970).

2. Ille V., Ille G., *Deformaţii şi solicitări într-o placă trapezoidală.* Bul. şt. Inst. polit. Cluj, *12* (1969).
3. Girkmann K., *Flächentragwerke.* Springer Verlag, Wien 1959.
4. Weigler H., Weise H., *Modellstatisches Verfahren zur Aufnahme von Einflussflächen von Platten.* Beton- und Stahlbetonbau, *5* (1959).
5. Mehmel A., Weise H., *Modellstatische Untersuchung punktförmig gestützter schiefwinkliger Platten unter besonderer Berücksichtigung der elastischen Auflagernachgiebigkeit.* Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1964.

DETERMINAREA TEORETICĂ ŞI EXPERIMENTALĂ A EFORTURILOR ŞI SUPRAFEŢELOR DE INFLUENŢĂ LA O PLACĂ TRAPEZOIDALĂ SIMPLU REZEMATĂ PE CONTUR

(Rezumat)

Cu relaţiile din [2] se calculează deformaţiile şi solicitările într-o placă trapezoidală simplu rezemată pe tot conturul, care sînt comparate cu rezultatele încercărilor experimentale pe un model de sticlă. Se constată o foarte bună concordanţă a rezultatelor obţinute pe cale teoretică cu cele experimentale. Pentru determinarea suprafeţelor de influenţă a eforturilor s-a utilizat un procedeu experimental, reprezentînd aceste suprafeţe pentru cîteva puncte caracteristice cu ajutorul curbelor de nivel. În încheiere, folosind acelaşi procedeu, se stabilesc suprafeţele de influenţă pentru centrul unei plăci rezemate pe mediu elastic.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1—2, 1972
Secţia V
CONSTRUCŢII, ARHITECTURĂ

D. K. 539.4

ÜBER DAS WECHSELN DES GRUNDSYSTEMS BEIM AUFHEBEN DER UNBESTIMMTHEIT VON GERADEN AUF MEHRERE STÜTZEN AUFLIEGENDEN BALKEN

VON

I. COŞEREANU und I. DEUTSCH

1. Das Aufheben der Unbestimmtheit eines Balkensystems mit Hilfe der Kräftemethode führt zur Verwendung eines „Grundsystems", welches sich aus dem statisch unbestimmten, nur durch das Behalten der absolut notwendigen Verbindungen für das Aufrechterhalten des Systems in einem statisch bestimmten Zustand, ergibt. Das so erhaltene System ist äquivalent mit einem statisch unbestimmten System, wenn es sowohl mit den gegebenen Belastungen als auch mit den statisch unbestimmten Reaktionen, vor denen die Verbindungsbedingungen des statisch unbestimmten Systems respektiert werden, versehen ist.

Im Falle von geraden, auf mehrere Stützen aufliegenden Balken kann als Grundsystem z. B. ein auf die Randstützen aufliegender Balken benützt werden. Für die Bestimmung der statisch unbestimmten Grössen, welche die Reaktionen aus den beseitigten Stützen sein können, können die kanonischen Gleichungen der Kräftemethode verwendet werden. Wenn die Stützen fest sind, ergeben sich die statisch unbestimmten Reaktionen $X_1, X_2, \ldots, X_p$ als Wurzeln des kanonischen Gleichungssystems:

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 + \ldots + \alpha_{1p}X_p + \Delta_{10} = 0, \\ \alpha_{21}X_1 + \alpha_{22}X_2 + \ldots + \alpha_{2p}X_p + \Delta_{20} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{p1}X_1 + \alpha_{p2}X_2 + \ldots + \alpha_{pp}X_p + \Delta_{p0} = 0, \end{cases}$$

wo die freien Glieder mit Hilfe der angewendeten Kräfte $P_{\mathrm{I}}, P_{\mathrm{II}}, \ldots, P_q$ bestimmt werden:

$$(2)\qquad \begin{cases} \Delta_{10} = \beta_{1\mathrm{I}}P_{\mathrm{I}} + \beta_{1\mathrm{II}}P_{\mathrm{II}} + \ldots + \beta_{1q}P_q, \\ \Delta_{20} = \beta_{2\mathrm{I}}P_{\mathrm{I}} + \beta_{2\mathrm{II}}P_{\mathrm{II}} + \ldots + \beta_{2q}P_q, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta_{p0} = \beta_{p\mathrm{I}}P_{\mathrm{I}} + \beta_{p\mathrm{II}}P_{\mathrm{II}} + \ldots + \beta_{pq}P_q. \end{cases}$$

Die Influenzkoeffizienten α_{ik} und β_{ik} (Verschiebungen in i hervorgerufen von einer einheitsgleichen, in k angewendeten Belastung) können z. B. mit Hilfe der M o h r -

Maxwell'schen Gleichung oder der Wereschtscheagin Regel bestimmt werden. Im Falle der Ausführung von Überprüfungsberechnungen für praktisch realisierte Systeme, mit einer komplexen geometrischen Gestaltung (z. B. einer Kurbelwelle), kann für die Vergrösserung der Berechnungsgenauigkeit, die Versuchsbestimmung der Influenzkoeffizienten durch das Messen der durch die einheitsgleiche Belastung hervorgerufene Verschiebung, bevorzugt werden. Laut dem Lehrsatz der Gegenseitigkeit der Verschiebungen ist $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$.

2. Ähnliche Gleichungssysteme wie (1) können auch im Falle von nichtfesten Stützen eines geraden Balkens, für die Aufhebung der Unbestimmtheit benützt werden. Im Einzelfall, wenn Unebenheiten einiger verschiedengrosser Stützen bestehen, wie z. B. durch das Spiel, wegen der Lagerabnützung einer Kurbelwelle, oder durch die zeitliche Variation der Abmessungen einiger Holzbalken entstandenen Unebenheiten, so benötigt man zur Berechnung des betreffenden Systems das Aufstellen der kanonischen Gleichungen in mehreren Grundsystemen. In solchen Fällen kann man an Stelle der Bestimmung der Influenzkoeffizienten für jedes Grundsystem, mit Hilfe der bekannten Methoden, Gleichungen aufstellen, welche das Berechnen der Influenzkoeffizienten für ein bestimmtes Grundsystem mit Hilfe der Influenzkoeffizienten eines anderen Grundsystems ermöglichen. In den folgenden Zeilen werden solche Gleichungen, für den Fall gerader, auf mehrere Stützen aufliegender Balken, aufgestellt.

3. Es werden zwei Grundsysteme für ein und denselben geraden, statisch unbestimmten Balken in Erwägung gezogen. Für das erste Grundsystem, bei welchem der Balken nur auf den Randstützen aufliegt, sind die Influenzkoeffizienten α_{ik} und β_{ik}, für das zweite Grundsystem α'_{ik}, bzw. β'_{ik}. Die Influenzkoeffizienten des ersten Grundsystems werden als bekannt angenommen. In Folgendem wird der Berechnungsmodus der Koeffizienten α'_{ik} präsentiert. Die Koeffizienten β'_{ik} werden ähnlich berechnet.

Es wird ein auf $p + 2$ Stützen aufliegender Balken angenommen, wobei p den Unbestimmungsgrad darstellt. Beim ersten Grundsystem des Balkens (Abb. 1 *b*) wird in k eine einheitsgleiche Belastung angewendet und nachher die Influenzkoeffizienten α_{mk}, α_{ik} u. s. w. berechnet.

Beim zweiten Grundsystem, wo die Stützen in m und n beibehalten wurden (Abb. 1 *c*), ruft eine einheitsgleiche, in k angewendete Kraft die Reaktionen

$$\lambda_{mk} = \frac{l_{mk}}{l_{mn}} \quad \text{und} \quad \lambda_{nk} = 1 - \lambda_{mk} \tag{3}$$

hervor.

Wenn diese Reaktionen auf das erste Grundsystem angewendet werden, deformiert sich der Balken wie in Abb. 1 *d* und 1 *e*. In der Sektion i z. B. entstehen die Verschiebungen $(1 - \lambda_{mk})\,\alpha_{im}$ bzw. $\lambda_{mk}\,\alpha_{in}$.

Durch das Aufeinanderlegen der in den Abb. 1 *b*, 1 *d* und 1 *e* dargestellten Belastungszuständen erhält man folgende Verschiebungen :

$$(4)\qquad \begin{cases} \text{a) in } m: v_m = \alpha_{mk} - (1 - \lambda_{mk})\alpha_{mm} - \lambda_{mk}\alpha_{mn}, \\ \text{b) in } i: v_i = \alpha_{ik} - (1 - \lambda_{mk})\,\alpha_{im} - \lambda_{mk}\,\alpha_{in}, \\ \text{c) in } n: v_n = \alpha_{nk} - (1 - \lambda_{mk})\,\alpha_{nm} - \lambda_{mk}\alpha_{nn}. \end{cases}$$

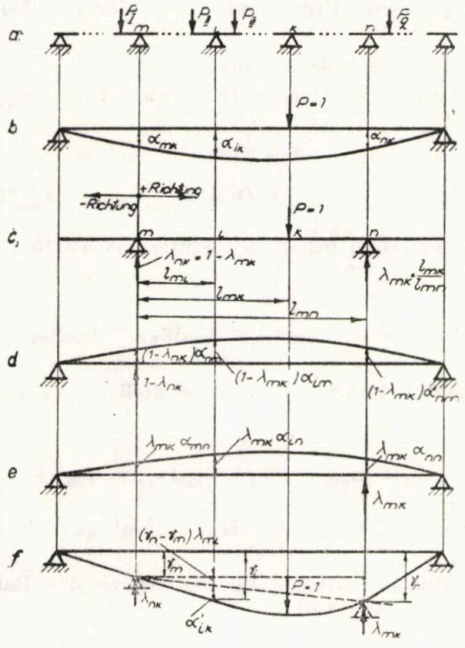


Abb. 1

Im zweiten Grundsystem wird nun vorausgesetzt, dass die Verschiebungen in m und n gleich mit null sind, da der Balken in diesen Punkten aufliegt. In diesem Fall stellen die durch die Einheitsbelastung, die Belastung λ_{mk} und λ_{nk} (Abb. 1 *f*) hervorgerufenen Verschiebungen der mittleren deformierten Faser, welche von der, die Punkte m und n im deformierten Zustand, verbindenden Geraden gemessen wurden, die Influenzkoeffizienten für das zweite Grundsystem dar :

$$\alpha'_{ik} = v_i - v_m - \frac{l_{mi}}{l_{mn}}(v_n - v_m).$$

Nach dem Einsetzen von (4) erhält man:

$$\alpha'_{ik} = \alpha_{ik} + \alpha_{mn} - \alpha_{mk} - \alpha_{im} + \lambda_{mk}(\alpha_{im} - \alpha_{in}) + \tag{5}$$
$$+ \lambda_{mi}[\alpha_{mk} - \alpha_{nk} + (1 - \lambda_{mk})(\alpha_{nm} - \alpha_{mm}) + \lambda_{mk}(\alpha_{nn} - \alpha_{mn})],$$

wo

$$\lambda_{mi} = \frac{l_{mi}}{l_{mn}}.$$

Die Zeichen der Koeffizienten λ_{mi} und λ_{mk} hängen von der Lage der Punkte i und k zu dem Punkt m, nach der im Abb. 1 *c* dargestellten Vereinbarung *ab*.

Es werden folgende Sonderfälle beachtet:

1° Die Stützen m und n sind symmetrisch angeordnet ($\alpha_{nn} = \alpha_{mm}$):

$$\alpha'_{ik} = \alpha_{ik} + \alpha_{mn} - \alpha_{mk} - \alpha_{im} + \lambda_{mk}(\alpha_{im} - \alpha_{in}) + \tag{6}$$
$$+ \lambda_{mi}[\alpha_{mk} - \alpha_{nk} + (1 - 2\lambda_{mk})(\alpha_{mn} - \alpha_{mm})].$$

2° Das zweite Grundsystem behält den Stützen m als Randstützen ($\alpha_{mk} = \alpha_{im} = \alpha_{mm} = \alpha_{mn} = 0$):

$$\alpha'_{ik} = \alpha_{ik} - \lambda_{mk}\alpha_{in} - \lambda_{mi}(\alpha_{nk} - \lambda_{mk}\alpha_{nn}). \tag{7}$$

3° Die einheitsgleiche Kraft wird an der Stelle eines Randstützen angewendet ($\alpha_{ik} = \alpha_{mk} = \alpha_{nk} = 0$):

$$\alpha'_{ik} = \alpha_{mn} - \alpha_{im} + \lambda_{mk}(\alpha_{im} - \alpha_{in}) + \tag{8}$$
$$+ \lambda_{mi}[(1 - \lambda_{mk})(\alpha_{nm} - \alpha_{mm}) + \lambda_{mk}(\alpha_{nn} - \alpha_{mn})].$$

4° Es wird der Influenzkoeffizient für die sich an den Balkenenden befindlichen Punkte gesucht ($\alpha_{ik} = \alpha_{im} = \alpha_{in} = 0$):

$$\alpha'_{ik} = \alpha_{mn} - \alpha_{mk} + \lambda_{mi}[\alpha_{mk} - \alpha_{nk} + (1 - \lambda_{mk})(\alpha_{nm} - \alpha_{mm}) + \tag{9}$$
$$+ \lambda_{mk}(\alpha_{nn} - \alpha_{mn})].$$

4. Die für die Berechnung des Influenzkoeffizienten β_{ik} benötigte Forme ist ähnlich mit (5):

$$\beta'_{ik} = \beta_{ik} - \beta_{mk} + \alpha_{mn} - \alpha_{im} + \lambda_{mk}(\alpha_{im} - \alpha_{in}) + \tag{10}$$
$$+ \lambda_{mi}[\beta_{mk} - \beta_{nk} + (1 - \lambda_{mk})(\alpha_{mn} - \alpha_{mm}) + \lambda_{mk}(\alpha_{nn} - \alpha_{mn})].$$

Als Anwendungsbeispiel wird ein auf fünf Stützen aufliegender Balken (Abb. 2) das Berechnungsschema einer Kurbelwelle, gegeben [1].

Bekannt sind die Influenzkoeffizienten des Grundsystems $0-4$: $\alpha_{11} = \alpha_{33} = 0{,}8177$, $\alpha_{12} = \alpha_{23} = 1$ und $\alpha_{13} = 0{,}6404$. Es müssen die Koeffizienten α'_{00} und α'_{12} für das Grundsystem $3-4$ bestimmt werden. In diesem Sinne wird die Formel (7), in welcher $i = k = 0$, $m = 4$, $n = 3$, angewendet :

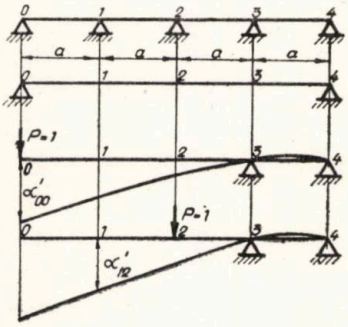


Abb. 2

$$\lambda_{mk} = \lambda_{mi} = \lambda_{40} = 4\,; \quad \alpha_{00} = \alpha_{03} = \alpha_{30} = 0.$$

Es folgt :

$$\alpha'_{00} = \lambda_{40}\lambda_{40}\alpha_{33} = 4^2 \cdot 0{,}8177 = 13{,}0832.$$

Mit Hilfe von $i = 1$, $k = 2$, $\lambda_{mk} = \lambda_{42} = 2$, $\lambda_{mi} = \lambda_{41} = 3$ erhält man :

$$\alpha'_{12} = \alpha_{12} - \lambda_{42}\alpha_{13} - \lambda_{41}(\alpha_{32} - \lambda_{42}\alpha_{33}) =$$

$$= 1 - 2 \cdot 0{,}6404 - 3(1 - 2 \cdot 0{,}8177) = 1{,}6254.$$

Eingegangen am 9. Juni 1971

Technische Hochschule, Braşov

LITERATURVERZEICHNIS

1. Coşereanu I., Deutsch I., Neamţu T., Sperchez Fl., *Die Festigkeitsberechnung der Kurbelwelle vom Motor des Traktors U-650, mit Berücksichtigung des Spieles in den Lagern.* Mitteilung an der wissenschaftlichen Tagung der Technischen Hochschule Braşov, 1971.
2. Гвоздев А. А., *Общий метод расчета сложных статически неопределимых систем.* Изд. МИИТ, М., 1927.
3. Mazilu P., *Statica construcţiilor.* Vol. II, Ed. Tehn., Buc. 1959.
4. Рабинович И. М., *Строительная механика в СССР.* Стройиздат, М., 1969.

ASUPRA SCHIMBĂRII SISTEMULUI DE BAZĂ LA RIDICAREA NEDETERMINĂRII PENTRU GRINZI DREPTE PE MAI MULTE REAZEME

(Rezumat)

Se stabilesc relaţii între coeficienţii de influenţă care intervin în sistemul de ecuaţii canonice din metoda forţelor, pentru grinzi continui pe mai multe rcazeme, odată cu schimbarea sistemului de bază, relaţii care permit calculul acestor coeficienţi pentru orice sisteme de bază, de îndată ce au fost determinaţi cei pentru unul anumit.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1—2, 1972
Secţia V
CONSTRUCŢII, ARHITECTURĂ

D. K. 624.014,7

THE CRITICAL COMPRESSIVE STRESS FOR RECTANGULAR PLATES WITH BOTH UNLOADED EDGES EITHER HINGED OR CLAMPED IN THE ELASTO-PLASTIC RANGE

BY

GH. MĂRMUREANU and C. JANTEA

1. Introduction

The theoretical treatment of local buckling in thin-walled sections is well established in the elastic range. It is based on the fundamental equilibrium equations for compressed thin plates under various edge conditions. It is very important to find the critical stress of the structures made up of plates that works in the elasto-plastic range.

Ilyushin [1] has treated the stability of plates in the elasto-plastic range by considering them as isotropic.

Also, later, Stowell [2] in 1950 had improved the Ilyushin's theory by considering the Shanley's results. Later, in 1952, Bleich [3] considered the anisotropic behaviour of the plates in the elasto-plastic range, but he corrected only the general differential equation of equilibrium of the plate in the elasto-plastic range by introducing coefficients.

First of the authors ([4] and [5]) have studied the problem of buckling of the plates in the elasto-plastic range by considering the plates as anisotropic and introduced a variable modulus of elasticity $E_x = E_{sec}$, $E_y = E$, and also, it was taken a variable Poisson ratio in the longitudinal and transverse direction.

Finally, it was founded the general differential equation of equilibrium for a plate in the inelastic range as follows:

$$C_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - C_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2C_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - C_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + C_5 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \tag{1}$$

$$= -\frac{t}{D'}\left(\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

where:

$$C_1 = 1 - (1 - \mu_1\mu_2)\left(\frac{\sigma x}{\sigma_i}\right)^2\left(1 - \frac{E_t}{E_{sec}}\right), \qquad C_2 = \frac{4\sigma_x\tau_{xy}}{\sigma_i^2}(1 - \mu_1\mu_2)\left(1 - \frac{E_t}{E_{sec}}\right),$$

$$C_3 = 1 - 0.5(1 - \mu_1\mu_2)\left(1 - \frac{E_t}{E_{sec}}\right)\frac{\sigma_x\sigma_y}{\sigma_i^2} + \frac{\mu_2}{2} -$$

$$- 2(1 - \mu_1\mu_2)\left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_i}\right)^2\left(1 - \frac{E_t}{E_{sec}}\right) + \frac{E}{E_{sec}} \cdot \frac{\mu_1}{2},$$

$$C_4 = \frac{\sigma_y\tau_{xy}}{\sigma_i^2}(1 - \mu_1\mu_2)\left(1 - \frac{E_t}{E_{sec}}\right), \qquad C_5 = \frac{E}{E_{sec}}, \qquad D' = \frac{E_{sec}t^3}{12(1 - \mu_1\mu_2)};$$

t — thickness of the plate, E_t — the tangent modulus (Table 1), E_{sec} — secant modulus (Table 1), for aluminium alloy 6 061 — T6. The equation (1) is the E u l e r equation that results from a minimization of the integral :

$$\iint\left(\frac{D'}{2}\left\{C_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 - C_2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + C_3\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] -\right.\right.$$

$$- C_4\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_5\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\Big\} - \frac{4\sigma_i}{2}\left[\frac{\sigma_x}{\sigma_i}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \right. \tag{2}$$

$$\left.\left. + \frac{2\tau}{\sigma_i}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\sigma_y}{\sigma_i}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\right) dx\, dy,$$

which represents the difference between the strain energy in the plate and the work done on the plate by the external forces.

Table 1

Values of E_t *and* E_{sec} (daN/cm²)

σ daN/cm²	ε	E_t	E_{sec}	E_t/E_{sec}	E_{sec}/E
2 250.00	0.0031914	690 538	706 272	0.977722	0.998971
2 480.00	0.0035465	591 570	700 679	0.844281	0.972579
2 660.00	0.0039039	381 080	681 369	0.559285	0.963747
2 800.00	0.004130	196 280	634 488	0.309353	0.897437
3 000.00	0.0062770	60 100	480 006	0.125301	0.678933

If the integral (2) is set equal to zero and the resulting equation solved for σ_i, the critical stress intensity in the elasto-plastic range $(\sigma_i)_{pl}$ is :

$$(3)\qquad (\sigma_i)_{pl} = \frac{D'}{t}\cdot\frac{\iint\left\{C_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 - C_2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + C_3\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]\right.}{\iint\left[\frac{\sigma_x}{\sigma_i}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2\,\frac{\tau}{\sigma_i}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\sigma_y}{\sigma_i}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy} -$$

$$-\frac{\left.C_4\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + C_5\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^5\right\}dx\,dy + \frac{\varepsilon}{b}\int\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=y_0}\right]^2 dx}{\iint\left[\frac{\sigma_x}{\sigma_i}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 2\,\frac{\tau}{\sigma_i}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial_i}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy},$$

where ε is the magnitude of the restraint along one longitudinal edge of the plate and y_0 is the edge coordinate.

In the elastic range we have $C_1 = C_3 = C_5 = 1$ and $C_2 = C_4 = 0$, and then we will get the critical stress intensity $(\sigma_i)_{el}$ that is similar to expression (3).

For a direct measure of the effectivenes of plasticity in reducing the critical stress of a structure (plate), we can use the plasticity factor η defined as:

$$(4)\qquad \eta = \frac{(\sigma_i)_{pl}}{(\sigma_i)_{el}}.$$

2. Determination of the Coefficient η

These theoretical results will be applied to long plates with both edges either hinged or clamped uniformly compressed in the x direction (Fig. 1) and it will be calculated the η's values.

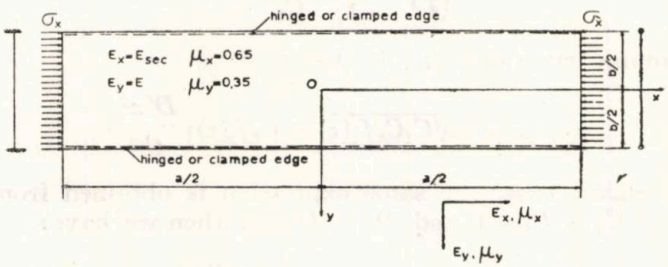


Fig. 1. – Rectangular plate under edge compression.

In this case, a satisfactory deflection surface is know to be [6]:

$$(5)\qquad w = \left[\frac{\pi\varepsilon}{2}\left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{4}\right) + \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\frac{\pi y}{b}\right]\cos\frac{\pi x}{\lambda},$$

where : ε — the magnitude of the elastic restraint of the edge $y=\pm b/2$, $\lambda = a/m$, $(m = 1, 2, 3, ...)$, λ — the half wave length of the buckle pattern.

Substitution of this expresion for w in equation (3) (in this case $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$, $\sigma_i = \sigma_x$) gives :

$$(\sigma_x)_{pl} = \left[C_1\left(\frac{b}{\lambda}\right)^2 + C_3 f_2(\varepsilon) + C_5\frac{\lambda^2}{b^2}f_1(\varepsilon)\right]\frac{D'}{t}\cdot\frac{\pi^2}{b^2}, \tag{6}$$

where :

$$f_1(\varepsilon) = \frac{0.023678\varepsilon^2 + 0.09470\varepsilon + 0.5}{0.0046039\varepsilon^2 + 0.09470\varepsilon + 0.5}, \tag{7}$$

$$f_2(\varepsilon) = \frac{0.0114\varepsilon^2 + 0.18943\varepsilon + 1.0}{0.0046039\varepsilon^2 + 0.09470\varepsilon + 0.5}. \tag{8}$$

In order to find the minimum value of $(\sigma_x)_{pl}$,

$$\frac{\partial(\sigma_x)_{pl}}{\partial(b/\lambda)^2} = 0,$$

which gives :

$$C_1 + \frac{C_5}{-(\lambda/b)^4}f_1(\varepsilon) = 0,$$

or

$$\left(\frac{b}{\lambda}\right)^2 = \sqrt{\frac{C_5 f_1(\varepsilon)}{C_1}}, \tag{9}$$

and the minimum value of $(\sigma_x)_{pl}$ is then :

$$(\sigma_x)_{pl} = [2\sqrt{C_1 C_5 f_1(\varepsilon)} + C_3 f_2(\varepsilon)]\frac{D'\pi^2}{tb^2}. \tag{10}$$

For the elastic case, the same expression is obtained from equation (10) with $C_1 = C_3 = C_5 = 1$ and $D' = D$ and then we have:

$$(\sigma_x)_{el} = [2\sqrt{f_1(\varepsilon)} + f_2(\varepsilon)]\frac{D\pi^2}{tb^2}. \tag{11}$$

The quantity η is then :

$$\eta = \frac{E_{sec}}{E}\cdot\frac{2\sqrt{C_1 C_5 f_1(\varepsilon)} + C_3 f_2(\varepsilon)}{2\sqrt{f_1(\varepsilon)} + f_2(\varepsilon)}. \tag{12}$$

Now, if the edges $y = \pm b/2$ are hinged, $\varepsilon = 0$, $f_1(\varepsilon) = 1$, $f_2(\varepsilon) = 2$, and from (12)

$$\eta = \frac{E_{scc}}{E}(0.5\, C_3 + 0.5\sqrt{C_1 C_5}), \tag{13}$$

which is plotted as curve (C) for 6 061—T6 aluminium alloy in Fig. 2.

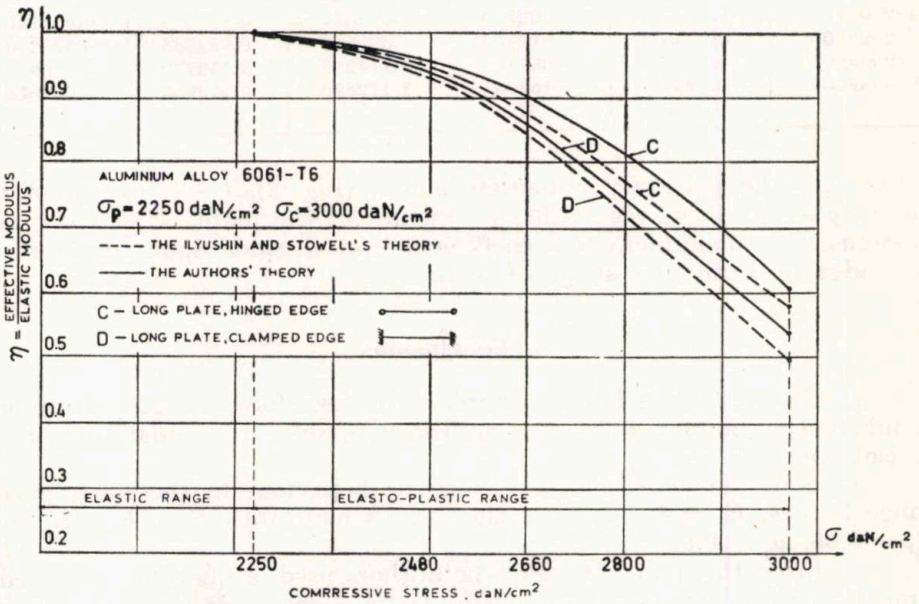


Fig. 2. — Computed curves showing variation of η with stress for aluminium alloy 6 061—T6.

If the edges $y = \pm b/2$ are clamped, $\varepsilon = \infty$, $f_1(\varepsilon) = 5.144$, $f_2(\varepsilon) = 2.46$, and from (12)

$$\eta = \frac{E_{scc}}{E}(0.352\, C_3 + 0.648\sqrt{C_1 C_5}), \tag{12}$$

which is plotted as curve (D) for 6061—T6 aluminium alloy in fig. 2.

The coefficients C_1, C_3 and C_5 are given in Table 2 for aluminium alloy 6 061—T6 with proportional limit $\sigma_p = 2\,250$ daN/cm² and yielding limit $\sigma_y = 3\,000$ daN/cm².

Finally, the compressive stress at which buckling occurs into the elasto-plastic range is given as:

$$\sigma_{cr} = k\frac{\eta\pi^2 E}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{t}{b}\right)^2, \tag{15}$$

Table 2

Values of C_1, C_3 and C_5

σ daN/cm²	C_1	C_3	C_5	C_1C_5	$\sqrt{C_1C_5}$
2 250.00	0.98278	1.000334	1.001029	0.98371	0.991850
2 480.00	0.87970	1.002930	1.009021	0.887635	0.942140
2 660.00	0.65954	1.012220	1.037610	0.684345	0.827250
2 800.00	0.46647	1.037140	1.114285	0.519779	0.720955
3 000.00	0.32519	1.153681	1.472890	0.478969	0.692074

with : η — the plasticity reduction factor (Fig. 2), t — thickness of the plate, μ — Poisson's ratio, b — width of the plate, E — Young's modulus, k — nondimensional coefficient that depends upon condition of the edge restraint and shape of plate.

3. Conclusions

1. The proportional limit established above for the stability problem is inherently complex since it is necessary to solve the equations for an anisotropic material.

In fact, the plates has a anisotropic behaviour in the elasto-plastic range that is, $E_x \neq E_y$, $\mu_x \neq \mu_y$. The authors had taken $E_x = E_{sec}$, $E_y = E$, $\mu_x = 0.65$, $\mu_y = 0.35$.

2. From this point of view the authors used a quantity η in reducing the critical stress in the elasto-plastic range obtained by dividing the critical stress of the plates in the elasto-plastic range by the critical stress that would be obtained on the asumption of perfect elasticity.

3. The values of η are smaller than Stowell's one (Fig. 2) and this result is good for calculation of the critical compressive stress of the structures made up of plates.

Received, September 9, 1971

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Roads and Bridges

REFERENCES

1. Ilyushin A. A., *The Elasto-Plastic Stability of Plates.* NACA TM No. *1 188* (1947).
2. Stowell E. Z., *A Unified Theory of Plastic Buckling of Columns and Plates.* NACA, Report No. *898*, U. S. A.
3. Bleich F., *Buckling Strength of Metal Structures.* Mc Graw Hill, New York, 1952.
4. Mărmureanu Gh., *The Postbuckling Strength of the Light Gape Cold-Formed Members from Aluminium Alloys in the Elastic and Elasto-Plastic Range.* Int. RILEM Symposium, Buenos Aires, Argentina, September 13—17, 1971.

5. Mărmureanu Gh., *Calculul construcţiilor din aliaje de aluminiu. Rezistenţa postcritică a elementelor comprimate în domeniul elastic şi elasto-plastic.* Doctoral Dissertation, Civil Eng. Inst., Bucharest, 1970.
6. Lundquist E. E., Stowell E. Z., *Critical Compressive Stress for Flat Rectangular Plates Supported along All Edges and Elastically Restrained against Rotation along the Unloaded Edges.* NACA, Report No. *733* (1942).

EFORTUL UNITAR CRITIC PENTRU PLĂCI DREPTUNGHIULARE CU AMBELE LATURI NEÎNCĂRCATE, ARTICULATE SAU ÎNCASTRATE, ÎN DOMENIUL ELASTO-PLASTIC

(Rezumat)

Pe baza consideraţiilor moderne ale teoriei plasticităţii, autorii au îmbunătăţit teoriile lui Iliuşin, Stowell şi Bleich considerînd că plăcile comprimate după o direcţie au o comportare anizotropă în domeniul elasto-plastic. S-a considerat că $E_x = E_{sec}$, $E_y = E$, $\mu_x = 0{,}65$ şi $\mu_y = 0{,}35$.

În final autorii au determinat efortul unitar critic de flambaj în domeniul elasto-plastic, pentru plăci dreptunghiulare comprimate după o direcţie, cu ambele laturi neîncărcate, articulate ori încastrate, folosind un coeficient η de reducere a efortului unitar critic de flambaj din domeniul elastic.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1—2, 1972
Secția V
CONSTRUCȚII. ARHITECTURĂ

C. Z. 628.1

UTILIZAREA CALCULUI MATRICEAL LA REZOLVAREA REȚELELOR INELARE DE ALIMENTARE CU APĂ

DE

EMANOIL BÂRSAN și VICTOR ZAVATI

1. Introducere

Din examinarea legilor de mișcare a apei într-o rețea inelară alcătuită din N noduri și I inele rezultă două condiții hidraulice ce se pun sistemului:

1° La noduri, suma debitelor de apă pe conductele care vin spre nod să fie egală cu suma debitelor pe conductele care pleacă de la nod, plus debitul ce se consumă în nod, adică:

$$F_j = \sum_{1}^{N} Q_{ij} + C_j = 0, \tag{1}$$

unde: F_j reprezintă suma debitelor în nodul j, Q_{ij} — debitul tronsonului ij, cu semnul $(+)$ pentru debitele care vin în nodul j și semnul $(-)$ pentru debitele care pleacă din nod ($Q_{ij} = 0$ cînd nu există nici o legătură ij), C_j — debitul de consum al nodului, cu aceeași convenție de semne.

2 Pe fiecare inel al rețelei suma pierderilor de sarcină să fie egală cu zero, adică:

$$\sum_{1}^{I} H = 0, \tag{2}$$

unde H reprezintă presiunea într-un nod al rețelei.

La o rețea avînd N noduri și I inele numărul de ecuații de tipul (1) și (2) este $n = N + I - 1$. Pentru un astfel de sistem geometric poligonal numărul de laturi (tronsoane) L este $n = N + I - 1$.

Pentru noduri se pot scrie $N - 1$ ecuații de tipul (1) care conțin numai debitele Q_{ij}, nu și diametrele, iar pentru inele se pot scrie I ecuații de tipul (2). Cele n ecuații care rezultă în acest nod conțin $2n$ necunoscute (debitele și diametrele rețelei inelare), sistemul de ecuații fiind nedeterminat. Diverse rezolvări prin aproximații succesive sînt indicate în [1]. Admițînd o lege de variație pe tronson a debitului în funcție de pierderea de sarcină, de tipul celor prezentate în [2] și [3], sistemul de ecuații se reduce la n ecuații cu n necunoscute. Fie o astfel de lege exprimată prin ecuația Hazen-Williams.

Deoarece în practică se cere cunoaşterea a diferite tipuri de necunoscute, în cele ce urmează se va prezenta rezolvarea reţelei inelare de alimentare cu apă pentru necunoscute cum ar fi presiunile, debitele de consum şi rezistenţele tronsoanelor.

2. Rezolvarea unei reţele inelare alcătuită din conducte

Se consideră o reţea alcătuită din N noduri şi L conducte. Continuitatea pentru toate nodurile este exprimată prin relaţia (1).

Ecuaţia Hazen-Williams se scrie pentru un tronson sub forma :

$$Q_{ij} = 6{,}2.10^{-4}\, c_{HW}\, D^{2{,}63} \left(\frac{\Delta H}{L}\right)^{0{,}54}, \tag{3}$$

unde : Q_{ij} — debitul tronsonului, c_{HW} — coeficientul Hazen-Williams al tronsonului, D — diametrul tronsonului, H — pierderea de sarcină de-a lungul tronsonului, L — lungimea tronsonului.

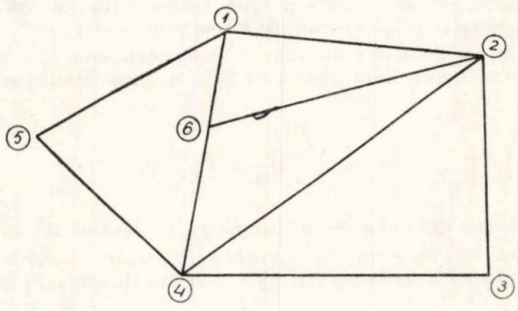


Fig. 1

Ecuaţia Hazen-Williams se pune sub forma :

$$Q_{ij} = \frac{H_i - H_j}{R_{ij}^{0{,}54} |H_i - H_j|^{0{,}46}} \tag{4}$$

în scopul păstrării semnului (+) de la nodul i la nodul j. R_{ij}, rezistenţa tronsonului care leagă nodurile i şi j, este dată de relaţia :

$$R_{ij} = \frac{850\,260\, L_{ij}}{c_{HW_{ij}}^{1{,}85} D_{ij}^{4{,}87}}. \tag{5}$$

Se introduce ecuația (4) în (1) obținîndu-se :

$$F_j = \sum_{i=1}^{N} \frac{H_i - H_j}{R_{ij}^{0,54} \, |H_i - H_j|^{0,46}} + C_j = 0, \qquad (j = 1, ..., N). \tag{6}$$

În ecuațiile stabilite necunoscutele sînt presiunile (H), consumurile de apă (C) și rezistențele conductelor (R). Deoarece ecuațiile de tipul $F_j(H, C, R) = 0$ sînt neliniare, soluția se obține aici prin iterații succesive cu ajutorul procedeului Newton-Raphson [2], [3], care constă în adăugarea la fiecare treaptă a unui grup de corecții la valorile inițiale ale necunoscutelor.

3. Procedeul Newton-Raphson

Fie ecuația $F(x) = 0$ și o valoare aproximativă inițială x_1 pentru soluția ecuației. Dacă $x_1 + \Delta x_1$ reprezintă o valoare a rădăcinii mai apropiată de cea reală, atunci :

$$\Delta x_1 = -\frac{F(x_1)}{F'(x_1)}, \tag{7}$$

expresie ce rezultă din dezvoltarea în serie Taylor a funcției $F(x_1 + \Delta x_1)$ și neglijarea termenilor care conțin Δx_1 la puteri mai mari ca 1.

Fie sistemul de N ecuații cu N necunoscute :

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, ..., x_N) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_N) = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F_N(x_1, x_2, ..., x_N) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

pentru care o soluție aproximativă este $x_1, x_2, ..., x_N$. Corecțiile sînt date de următoarele N ecuații liniare cuplate :

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, ..., x_N) + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + ... + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_N} \Delta x_N = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ F_N(x_1, x_2, ..., x_N) + \dfrac{\partial F_N}{\partial x_1} \Delta x_1 + ... + \dfrac{\partial F_N}{\partial x_N} \Delta x_N = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Corecțiile $\Delta x_1, .., \Delta x_N$ se adaugă algebric valorilor $x_1, ..., x_N$. Cu noile valori pentru necunoscute se continuă procedeul pînă cînd corecțiile se încadrează în limitele unor toleranțe admisibile.

Sub formă matriceală sistemul (9) se poate scrie :

$$[A][d] = [b], \tag{10}$$

unde $[A]$ este matricea pătratică care are elementele de forma $a_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ iar

$$[d] = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}, \qquad [b] = \begin{bmatrix} -F_1 \\ \vdots \\ -F_N \end{bmatrix}.$$

4. Formularea matriceală a ecuaţiei (6)

Fie h numărul necunoscutelor H r numărul necunoscutelor R şi c numărul necunoscutelor C, $(h + r + c = N)$. Utilizînd procedeul N e w t o n - R a p h s o n sistemul de ecuaţii (6) se poate scrie sub forma matriceală :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial H_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial R_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial C_c} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial H_1} & \cdots & \frac{\partial F_N}{\partial R_1} & \cdots & \frac{\partial F_N}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial F_N}{\partial C_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta H_1 \\ \vdots \\ \Delta C_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1 \\ \vdots \\ -F_N \end{bmatrix}, \tag{11}$$

unde derivatele parţiale se obţin din ecuaţia (6), după cum urmează :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_j}{\partial H_i} = \dfrac{0{,}54}{R_{ij}^{0,54} |H_i - H_j|^{0,46}} = \dfrac{\partial F_i}{\partial H_j}, \qquad \dfrac{\partial F_j}{\partial H_j} = -\sum\limits_{i \neq j}^{N} \dfrac{\partial F_j}{\partial H_j}, \\ \dfrac{\partial F_j}{\partial R_{ij}} = -\dfrac{0{,}54(H_i - H_j)}{R_{ij}^{1,54} |H_i - H_j|^{0,46}}. \end{cases} \tag{12}$$

Rezolvarea sistemului (11) se efectuează la un calculator electronic cifric. Necunoscutele se determină plecînd de la valori iniţiale cunoscute şi adăugînd corecţiile calculate cu (11). Calculul se opreşte atunci cînd corecţiile sînt sub o limită socotită admisibilă.

O b s e r v a ţ i i . Pentru alte legături între debit şi pierderea de sarcină se calculează derivatele parţiale corespunzătoare şi se introduc în (10).

5. Exemplu

Fie rețeaua inelară din fig. 1 avînd $N=6$ și $L=9$. Necunoscutele, în număr de 6, sînt: H_1, H_3, R_{2-4}, C_3, C_5, C_6.

Ecuația (11) capătă forma:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial H_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial H_1} & \frac{\partial F_2}{\partial H_3} & \frac{\partial F_3}{\partial R_{2-4}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_3}{\partial H_3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_4}{\partial H_3} & \frac{\partial F_4}{\partial R_{2-4}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial F_5}{\partial H_1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial F_6}{\partial H_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Delta H_1 \\ \Delta H_3 \\ \Delta R_{2-4} \\ \Delta C_3 \\ \Delta C_5 \\ \Delta C_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -F_1 \\ -F_2 \\ -F_3 \\ -F_4 \\ -F_5 \\ -F_6 \end{vmatrix},$$

în care derivatele parțiale sînt date de relațiile (12).

Primită la 16 septembrie 1971

Institutul politehnic, Iași
Catedra de construcții și instalații hidrotehnice

BIBLIOGRAFIE

1. Trofin P., *Alimentări cu apă.* Vol. III, Buc., 1966, 152–168.
2. Shamir U., Howard Ch. D. D., *Water Distribution Systems Analysis.* J. of the Hydraulics Division, 219–227 (1968).
3. Ludewig D., *Beitrag zur Rohrnetzberechnung mit Degitalautomaten.* Wasserwirtschaft-Wassertechnik, *5* (1971).

UTILISATION OF THE MATRIX ALGEBRA TO THE RESOLVING THE WATER SUPPLY SYSTEMS

(Summary)

Considering the relation between the flow and the loss of head given by the Hazen-Williams equation, it is indicated the resolving mode of a water-supply system using an iterative process carried out by a digital computer.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1—2, 1972
Secţia V
CONSTRUCŢII, ARHITECTURĂ

C. D. 624.014.26

CONSIDÉRATIONS SUR LA STABILITÉ GÉNÉRALE DES POUTRES DROITES SOUMISES À LA FLEXION — COMPRESSION (II)

PAR

DAN PRECUPANU

1. Introduction

En utilisant les hypothèses faites dans [4], nous nous proposons dans cette Note, de traiter le cas de la poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre, qui a la section rectangulaire constante et qui est soumise à un moment de flexion et à un effort axial de compression.

2. Équation de stabilité

Soit une poutre droite encastrée à une extremité, soumise aux charges transversales P_i, situées dans son plan de symétrie, et à un effort axial de compression N (fig. 1 *a*). Le moment d'inertie quadratique I_z de la section rectangulaire est beaucoup plus grand que I_y (fig. 1).

On choisit le repère de référence avec l'origine dans l'extrémité gauche de la poutre, un axe dirigé suivant l'axe longitudinal et les autres dirigés suivant les directions principalles centrales de la section transversale.

Supposons que pour une certaine valeur des forces extérieures, la poutre flambe dans le plan XOY, par flexion latérale et torsion (fig. 1 *b*, 1 *c*).

Le centre d'une section courante d'abscisse x se déplace de A en A' en étant caractérisé par les déplacements u, v, φ, positives pour le repère choisi.

Le vecteur-moment M des forces transversales P_i peut être décomposé en composantes, à savoir :

a) un moment de torsion

$$M_{t,P} = M \sin \theta \approx M\theta, \tag{1}$$

b) un moment de flexion dirigé suivant l'axe OZ

$$M_{z,P} = M \cos \varphi \approx M, \tag{2}$$

c) un moment de flexion dirigé vers l'axe OY

$$M_{y,P} = M \sin \varphi \approx M\varphi. \tag{3}$$

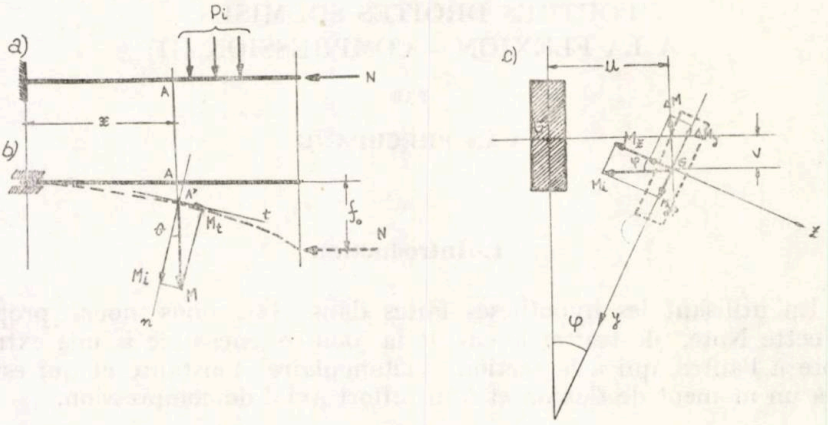


Fig. 1

Dans la même section courante A, l'effort axial N donne un moment supplémentaire ΔM, qui dans l'hypothèse des petites déplacements en plan vertical, a les composantes :

$$\Delta M_z = \Delta M \sin \varphi \approx \Delta M \, \varphi, \quad \Delta M_y = -\Delta M \cos \varphi \approx -\Delta M.$$

Si l'on applique le principe de superposition (des forces P_i et de l'effort N) on obtient les efforts totals suivants :

$$M_t = M\theta, \quad (5) \quad M_z = M + \Delta M \, \varphi, \quad (6) \quad M_y = M\varphi - \Delta M, \tag{4}$$

où M est le moment de flexion dans une section courante de la poutre, produit seulement par les forces transversales P_i, et ΔM est le moment supplémentaire correspondant à l'effort axial N, qui est déterminé par la relation :

$$\Delta M = N(f_0 - u). \tag{7}$$

Par suite, les équations différentielles de la déformée sont

$$(8) \qquad \varphi' = \frac{M}{GI_t}\theta, \qquad (9) \qquad u'' = -\frac{M\varphi - N(f_0 - u)}{EI_y},$$

qui, ensemble avec la relation géometrique

$$(10) \qquad \theta = \frac{du}{dx},$$

constituent un système de trois équations aux inconnues u, φ, θ et le paramètre f_0.

Si l'on élimine les inconnues φ et θ, on obtient l'équation différentielle de la stabilité :

$$(11) \qquad u^{IV} + \alpha^2 u'' = 0,$$

où le coefficient α^2 est donné par la relation :

$$(12) \qquad \alpha^2 = \frac{M^2}{EI_y GI_t} + \frac{N}{EI_y}.$$

Par l'intégration de l'équation (11) on trouve l'expression du moment fléchissant critique. Comme le coefficient α est variable (en fonction du moment M), on peut déterminer la solution générale de l'équation à l'aide des méthodes approximatives de calcul, par exemple la méthode des approximation succésives, la méthode des différences finies, etc.

Cas particulier

Si le moment M est constant (c'est-à-dire la flexion est pure) le coefficient α est aussi constant et l'integrale générale de l'équation (11) peut être écrite sous la forme :

$$u = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + Cx + D.$$

On peut déterminer les constantes A, B, C, D par des conditions aux extrémités, à savoir : a) $x = 0$, il résulte $u = 0$ et $u' = 0$, (aussi $\varphi = 0$). Compte tenu des relations (10) et (8) pour $u' = 0$ on obtient $\theta = 0$ et par conséquent $\varphi' = 0$. Si l'on dérive la relation (9), il résulte évidemment que $u''' = 0$ (on néglige l'effort tranchant) ; b) $x = l$, il résulte $u'' = 0$ (de la relation (9) où $M = 0$).

Ces quatre conditions conduisent à un système linéaire homogène avec les inconnues A, B, C, D. Pour obtenir une solution non banale on impose la condition que le déterminant des coefficients soit nul. Ainsi on trouve :

$$\alpha l = \frac{2n+1}{2}\pi.$$

Compte tenu de la relation (12) il en résulte :

$$\frac{M^2}{EI_yGI_t} + \frac{N}{EI_y} = \frac{(2n+1)^2}{4l^2}\pi^2.$$

Pour $n = 0$ on obtient la plus petite valeur des forces extérieures pour la quelle est satisfaite cette relation, à savoir :

$$\frac{M_{cr}^2}{EI_yGI_t} + \frac{N_{cr}}{EI_y} = \frac{\pi^2}{4l^2}. \tag{13}$$

Si l'effort axial N est nul, c'est-à-dire si la poutre est solicitée à une flexion pure, le moment fléchissant critique est donné par :

$$M_{cr} = \frac{\pi}{2l}\sqrt{EI_yGI_t}. \tag{14}$$

Mais, si le moment de flexion est nul, c'est-à-dire si la barre est comprimée, on obtient la valeur de la charge critique :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI_y}{(2l)^2}. \tag{15}$$

On retrouve deux relations bienconnues.

3. Conclusion

L'équation de stabilité (11) a une forme semblable à l'équation établie pour la poutre sur deux appuis, et par conséquent, le problème de la détermination de la charge critique peut être traité en partant de la même équation de stabilité. Les appuis interviennent dans l'expression des conditions nécessaires pour la détermination des constantes d'integration.

En utilisant la remarque déjà faite, on peut synthétiser les résultats donnés par la relation (12) du travail [4] et la relation (13) de cette Note, par la relation :

$$\frac{M_{cr}^2}{EI_yGI_t} + \frac{N_{cr}}{EI_y} = \frac{\pi^2}{(kl)^2}, \tag{16}$$

où k est un coefficient qui dépend seulement des appuis, dénommé *le coefficient de la longueur de flambage* et qui a les valeurs suivantes : a) $k = 1$ pour une poutre articulée aux deux extrémités, b) $k = 2$ pour une poutre

encastrée à une extrémité et libre à l'autre, c) $k = 0{,}5$ pour une poutre encastrée aux deux extrémités, d) $k = 0{,}7$ pour une poutre encastrée à une extrémité et articulée à l'autre.

Reçue le 26 mars 1970

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Statique et de Résistance des Matériaux

BIBLIOGRAPHIE

1. Timoshenko S. P., *Teoria stabilităţii elastice*, (traduit de l'anglais). Ed. Tehn., Buc., 1967.
2. Beleş A. A., Voinea R. P., *Rezistenţa materialelor*. Vol. II, Ed. Tehn., Buc., 1958.
3. Dellus P., *Résistance des matériaux*. Paris, 1964.
4. Precupanu D., *Considérations sur la stabilité générale des poutres droites soumises à la flexion—compresssion*. I. Bul. Inst. polit. Iaşi, s.V, XVII (XXI), *1—2* (1971).

CONSIDERAŢII ASUPRA STABILITĂŢII GENERALE A GRINZILOR DREPTE COMPRIMAT—ÎNCOVOIATE

(Rezumat)

Se studiază problema stabilităţii generale a unei console solicitată la compresiune centrică cu încovoiere plană, avînd secţiunea dreptunghiulară înaltă. Se ajunge la concluzia că ecuaţia de stabilitate are o formă asemănătoare cu cea stabilită pentru o grindă simplu rezemată, aşa încît pentru determinarea sarcinii critice a unei bare comprimat — încovoiate, se pleacă de la aceeaşi ecuaţie de stabilitate, independent de natura rezemării a capete şi modul de distribuţie al sarcinilor exterioare transversale. Reazemele intervin a determinarea constantelor de integrare din soluţia generală a ecuaţiei de stabilitate, ceea ce în faza finală de calcul se evidenţiază prin coeficientul de flambaj, asemănător celui definit în cazul unei bare comprimate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1—2, 1972
Secţia V
CONSTRUCŢII, ARHITECTURĂ

D. K. 620.19; 621,791,056; 539,16

BEZÜGLICH EINIGER ASPEKTE DER ZERSTÖRUNGSFREIEN DEFEKTOSKOPIE FUR DIE UNTERSUCHUNG GESCHWEISSTER VERBINDUNGEN (I) *)

PAUL COSMULESCU und RUDOLF MÜHLBÄCHER

1. Einführung

Die weitläufige Anwendung der Schweisstechnik führt nötigenfalls zur Entwicklung der Untersuchungsmethoden der Schweissverbindungen, nicht nur bezüglich des qualitativen Gutachtens des Schweissprozesses sondern auch zur stätigen Weiterentwicklung der Schweisstechnologien.

In den letzten Jahren nimmt unter den Forschungsfragen [2], [6] einen immer wichtigeren Platz der Einfluss der Schweissdefekte auf das Tragverhalten der Elemente ein, und es wurde versucht dieses mit Hilfe einiger Qualitätsklassen und Ausführungsarten der Schweissverbindungen zu definieren.

Unter diesen Voraussetzungen nehmen die zerstörungsfreien Untersuchungsmethoden der Materialien, und in erster Reihe die Ultraschall die gammaradiometrische und die Röntgendefektoskopie, einen wesentlich wichtigen Platz ein.

Man kann feststellen dass einige Forscher die Ansicht vertreten einer gewissen Untersuchungsmethode grosse Vorteile einzuräumen, und zwar der, in welcher sie sich spezialisiert haben, oder die sie am häufigsten anwenden.

2. Der aktuelle Stand des Problems

Unsere Bemühungen gelten den Problemen der zerstörungsfreien Untersuchung und dem Einfluss der Defekte auf die Tragfähigkeit geschweisster Stahl- und Aluminiumverbindungen, die nicht zuletzt auf die Forderungen einiger Industrieeinheiten [1]) zurückzuführen sind. In der ersten Etappe haben wir uns vorgenommen die theoretischen Grundlagen unseres Untersuchungsbereiches darzulegen.

---

*) Mitgeteilt an der wisenschaftlichen Tagung der Technischen Hoschule, Jassy, den 2.—4. Juli 1970.

*) Aluminiumwerke Slatina, Eisenbahnbezirk Jassy, Mechanisches Werk Nicolina—Jassy.

Die praktische Verwendung der Defektoskopie verfolgt : a) Auffinden der inneren Fehler in verschiedenen Herstellungsphasen, b) Untersuchung der Festigkeit der Materialien und der Bauelemente aus Metall, Keramik und Kunststoffen, c) Untersuchung der Struktur und der Güte der Metalle, d) Güteuntersuchungen der Schweissverbindungen.

Ihrerseits können die Fehler der Schweissverbindungen folgendermassen unterteilt werden : a) dimensionale Abweichungen der Schweissverbindungen, b) äussere Fehler der Schweissverbindungen (Endkrater, Materialverbrennung u.a.), c) innere Fehler der Schweissverbindungen (verschiedene Einschlüsse, unverschmolzene Stellen usw.).

Die gefährlichsten Fehler sind die letztgenannten, diese sind auch Objekt der zerstörungsfreien Untersuchungsmethoden.

Für eine bessere Aufklärung des Zusammenhangs Schweissfehler — Tragfähigkeit der Schweissverbindungen, haben wir es für gut gefunden als Studiummethode mehrere zerstörungsfreie Untersuchungsmethoden heranzuziehen, in betracht deren physischen Grenzmöglichkeiten.

In folgendem werden kurz die Grundlagen der Methoden angeführt, welche die Anwendung der Defektoskopie begründen.

3. Defektoskopie mit Röntgen- und Gammastrahlen

Ohne auf die physischen komplexen Vorgänge einzugehen, welche bei der Herstellung der X oder Gammastrahlung vor sich gehen, obwohl beide Strahlungen auf verschiedenen Wegen erhalten werden [2]), sind beide wellenförmig und leiden beim Durchgang durch die Materie eine Dämpfung, die einem exponenziellen Gesetz in Abhängigkeit der Stärke des durchdrungenen Materials folgt :

$$I = I_0 e^{\mu x}, \tag{1}$$

wobei : I_0 — Anfangsintensität des Strahlenbündels, μ — ein linearer Dämpfungskoefizient der Gammastrahlung, x — Stärke des absorbierenden Material ist.

Wenn man einen Körper oder ein Material, welches einer gleichförmigen penetranten X oder Gammastrahlung ausegsetzt ist untersucht, wird der Empfänger, in unserem Falle ein photografischer Film, alle Veränderungen der Einfallsstrahlungsintensität, welche durch die Unregelmässigkeiten hervorgerufen worden ist — die Fehler des Materials — registrieren.

Die Röntgenapparatur, welche in den industriellen Untersuchungslaboratorien in unserem Lande verwendet wird, umfasst eine weite Reihe von Typen, betreffs ihrer Vollkommenheit und Herstellungsfirmen.

Um einen Hauptnachteil, welche die Röntgenapparate bezüglich der Gammaeinrichtungen aufweisen zu überwinden, wurden neue „Liliput" Röntgenanlagen ausgearbeitet.

---

[2]) Die Röntgenstrahlung wird auf Grund dem Prinzip von C o o l d i g e in Röntgenröhren erhalten ; die Gammastrahlung wird von gammaaktiven Quellen ausgesandt.

Die Apparatur für die Gammadefektoskopie enthält eine gammaaktive Quelle. Sie ist viel einfacher, tragbar [2] und besitzt eine weitläufige Unabhängigkeit, weil sie keine elektrische Stromquelle oder Netzanschluss benötigt. Die Apparatur dieser Art, rumänischer Herstellung, ist in dem Institut für Atomphysik aus Bukarest hergestellt und umfasst verschiedene Typen, welche für die gewöhnlich verwendeten Strahlungsquellen Co^{60} und Ir^{192}, gebaut werden.

Die radioaktiven Isotope, Gammastrahlungssender, welche industriell angewendet werden, sind in der Tafel 1 angegeben.

Tafel 1

Radioaktives Isotop	Halbwertszeit	Penetrationsleistung MeV	Halbabsorbtionstärke aus Blei mm	Stärkeintervall mm
Ir 192	72 Tage	0,3	2,6	5...60
Cs 137	33 Jahre	0,66	8,0	20...60
Co 60	5,3 Jahre	1,17...1,33	13,0	30...150

Die Wahl und die Anwendung der Untersuchungsmethode und der geeignetsten Apparatur führt zur Berücksichtigung vieler Einflüsse und zwar : die verfolgte radiographische Empfindlichkeit, die Kontrollgüte, die Transportbedingungen, der Schutz, die Untersuchungsgeschwindigkeit u. a. Ebenfalls bedingt die Ausführung der Radiographien das strikte Einhalten der Brennweite, der Belichtungszeit oder die Anwendung einiger Schirme usw., alle diese definieren die sogenannte Belichtungsgeometrie (Schemadarstellung, s. Abb. 1, worin S — Strahlungquelle, D — kleinster Abstand Quelle—Film, d — Abstand Schweisnaht—Film).

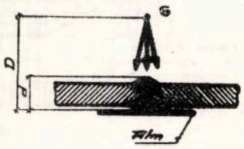


Abb. 1

Ein spezielles Problem, welches bei der Defektoskopie mit penetranter Strahlung auftritt, ist die untere Grenze der Anzeige der Fehler [3] in Strahlungsrichtung für gegebene Arbeitsbedingungen, d. h. der minimal feststellbare Fehler.

Im Falle der Gammagraphie hängt der minimal feststellbare Fehler von einer Reihe von Faktoren ab, davon die wichtigsten die Energie des vom radioaktiven Isotops ausgesandte Strahlung, die Dichte des untersuchten Materials, sowie die Belichtungsgeometrie, die Abmessungen der Strahlungsquelle, die Eigenschaften der photographischen Emulsion u. a. sind.

4. Ultraschalldefektoskopie

Die Wellen, die vom Ultraschallsender [5] ausgesandt werden, erfahren eine Dämpfung im Beisein des zu untersuchenden Materials, die durch dessen Struktur und der Divergenz des Ultraschallbündels, sowie durch andere Faktoren bedingt ist. Diese Dämpfung ist durch Absorbtion, bzw. der Umwandlung der Ultraschallenergie in thermische Energie und durch Diffusion, d. h. Zerstreuung der Energie durch die Struktur des Mediums in welchem sich die Einfallswellen fortpflanzen gekennzeichnet. Während die Absorbtion unabhängig von der Struktur des Materials ist [1], hängt die Diffusion von dieser ab, und zwar : a) von der Anisotropie der elastischen Eigenschaften der verschieden orientierten Teilchen, b) von Ablagerungen auf den Teilchentrannflächen, c) von kleinen Ungleichmässigkeiten (Einschlüsse, Poren usw.), welche in der Masse des Materials verteilt sind.

Im Falle der Ultraschallwellen ist die Dämpfung durch die Dämpfungskonstante α charakterisiert, die mit Hilfe mit zwei aufeinanderfolgenden Echos H_n und H_{n+1} laut Gleichung

$$\alpha = \frac{1}{2\delta} 20 \log \frac{H_n}{H_{n+1}} \tag{2}$$

berechnet wird, welche zwischen zwei planparallelen Flächen eines Körpers, die sich in einem Anstand δ cm voneinander befinden, aufkommen.

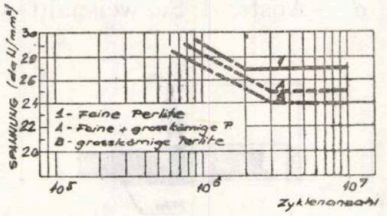


Abb. 2

Verwendet man den Zusammenhang zwischen der Ultraschalldämpfung, der Struktur und den mechanischen Eigenschaften einiger Stähle, so bemerkt man [7] dass die Fliessgrenze, der Schwindungskoefizient und die Dauerbruchfestigkeit von der Granulation des Metalls abhängen (Abb. 2).

Falls ein Fehler in dem zu untersuchenden Körper durch einen Ultraschallimpuls getroffen wird, so wird ein Teil des Impulses vom Fehler reflektiert. Der reflektierte Impuls des Fehlers (Fehlerecho) wird schneller als der reflektierte Impuls der Gegenfläche des Körpres (Grundecho) empfangen.

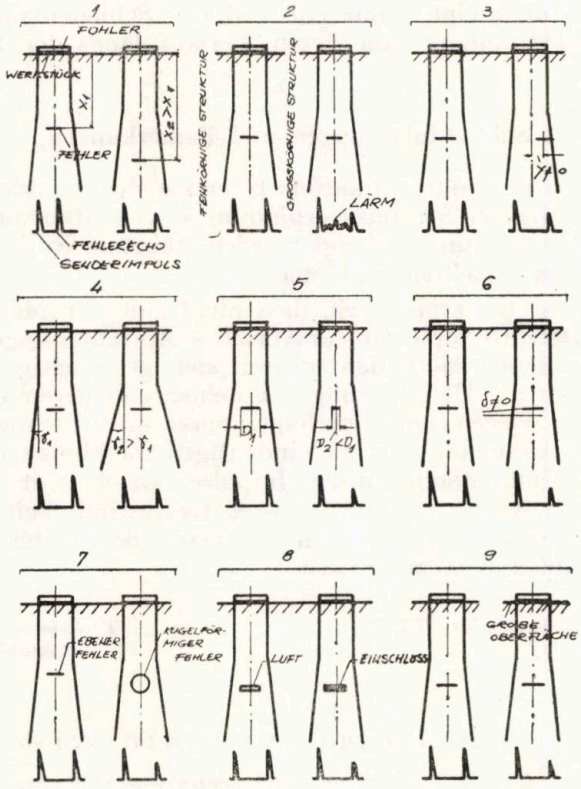


Abb. 3

Die Fehlerechohöhe hängt von einer Reihe von Faktoren ab, davon die wichtigsten folgende sind : a) die Tiefe in welcher sich der Fehler befindet (Abb. 3.1), b) die Struktur des Materials (Abb. 3.2), c) die Position des Fehlers bezogen auf die Achse des Ultraschallbündels (Abb. 3.3), d) die Divergenz des Ultraschallbündels (Abb. 3.4), e) die Grösse des Fehlers (Abb. 3.5), f) die Orientierung des Fehlers (Abb. 3.6), g) die Form des Fehlers (Abb. 3.7), h) die Art des Fehlers (Abb. 3.8), i) die Oberflächenbeschaffenheit des Materials (Abb. 3.9).

Somit hängt die Fehlerhöhe nicht nur von der Grösse des Fehlers ab, sondern auch von einer Reihe anderer Faktoren, von welchen einige fast

unmöglich prüfbar sind, wie die Orientierung und die Form des Fehlers. Auch im Falle bewährter technischer Anlagen (Defektoskop J. u. H. Krautkrämer) wurden die physischen Grenzen, der obengenannten Art, bei der Konstrolle von Schweissverbindungen von Eisenbahnschienen, festgestellt.

Somit sind nur ein Teil der Fehler des Körpres der „ultraschallbestrichenen" Flächen angezeigt — nur ein Teil des Schienenkopfes — ebenfalls hängt die Rissbestimmung von deren Verlauf längs der Strahlenbüdelsrichtung ab.

6. Schlussfolgerungen und Bemerkungen

Das theoretische und aplikative Interesse der zerstörungsfreien Defektoskopie, betreffs der Schweissverbindungen von Stahl und Aluminium, der Gutachten die von uns verlangt wurden, führten, in der ersten Phase, zum Umreissen der gestellten Probleme.

Aus dem gesagten ergibt sich, dass nicht eine der Methoden der zerstörungsfreien Defektoskopie ein universelles Anwendungsgebiet hat, sondern die verschiedenen Methoden müssen sich gegenseitig komplettieren. Darum, wenn man die Detektierung der Fehler und deren Einfluss auf die Tragfähigkeit der Bauelemente verfolgt, muss man mehrere zerstörungsfreie Methoden anwenden um zu eindeutigen Ergebnissen zu gelangen.

Die Ultraschallmethode durch Impulse, welche für Gesammtkontrolle von grossen Serien und mit grosser Geschwindigkeit der Elemente verwendet wird, muss noch mit den Aussagen der Untersuchungen mit penetranten Strahlen ergänzt werden.

Eingegangen am 16. September 1971

Technische Hochshule, Jassy,
Lehrstuhl für Bauwesen

LITERATURVERZEICHNIS

1. Bernath Al., Gutu S., *Un normativ pentru controlul ultrasonic al cusăturilor sudate cap la cap.* Conferinţa II de ultrasonică aplicată, Buc., 1968.
2. Blondel A., *Le controle nondestructif des matériaux par gammagraphie.* Paris, 1959.
3. Bratu Gh., Florican P., *Calculul defectului minim detectabil.* Rev. Tehnica Nucleară, *10*, 571–575 (1963).
4. Constantinescu N., Million A., *Despre rezistenţa îmbinărilor sudate cu defecte.* St. şi cerc. de metalurgie, *12* (1967).
5. Gheragol D. A., Fridman M., *Aparate cu ultrasunete.* Ed. Tehn., Buc., 1962.
6. Jones R., Facaoaru I., *An Analysis of Ansvers to a Questionnaire on the Ultrasonic Pulse Technique.* RILEM, Matériaux et Constructions, Essais et Recherches, *5*, 457–465 (1970).
7. Mocanu R., Palihovici V., *Unele consideraţii asupra influenţei defectelor sudate asupra rezistenţei acestora.* A VI-a conferinţă de sudură, Timişoara, 1969.
8. Noda T., *Some Experimental Study on the Attenuation of Ultrasonic Waves in Forget Steel.* Iron and Steel Inst., Japan, *42* (1956).

9. P o p a V., *Rezultate ale utilizării* Ir^{192} *în controlul cusăturilor sudate.* Tehnica Nucleară, *1*, 13—35 (1964).
10. P o p o v i c i Vl., S o n t e a S., *Sensibilitatea controlului defectoscopic nedistructiv la îmbinările sudate din aluminiu.* Colocviul CNIT şi MICM, Buc., 1968.

REFERITOR LA UNELE ASPECTE ALE DEFECTOSCOPIEI COMPLEXE, NEDISTRUCTIVE, PENTRU CONTROLUL CUSĂTURILOR SUDATE (I)

(Rezumat)

Preocupări de ordin teoretic şi aplicativ (colaborări cu producţia) au condus la studiul metodelor de investigaţie, cele mai eficiente, în defectoscopia îmbinărilor sudate la elemente de oţel şi aluminiu.

În lucrare se prezintă, în prima etapă, succint, fundamentarea teoretică a metodelor radiometrice şi ultrasonice, cu o privire critică asupra acestora şi concludenţei controlului nedistructiv.

Pe baza observaţiilor făcute, se ajunge la concluzia necesităţii efectuării controlului nedistructiv complex—ultrasonic şi radiometric, asupra îmbinărilor sudate.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1—2, 1972
Secția V
CONSTRUCȚII, ARHITECTURĂ

C. D. 624.13

RECHERCHES SUR LES PROPRIÉTÉS PHYSIQUES ET SUR LES CARACTÉRISTIQUES CHIMIQUES-MINÉRALOGIQUES DU LOESS DE LA VILLE DE JASSY

PAR

AL. CIORNEI, TUDOR SILION, VIOREL ERHAN și GABRIELA COVALI

1. Introduction

Le problème de la fondation sur terres loessoïdalles a déterminé l'étude du comportement de ces terres par des essais de laboratoire et aussi a l'échelle naturelle.

Sur le territoire de la ville de Jassy, les terres sensibles à l'humectation occupent une surface d'approximatif 65% de celle construite de la ville (fig. 1). C'est pour cette raison que les chercheurs ont axé leurs préoccupations sur le problème de la détermina-

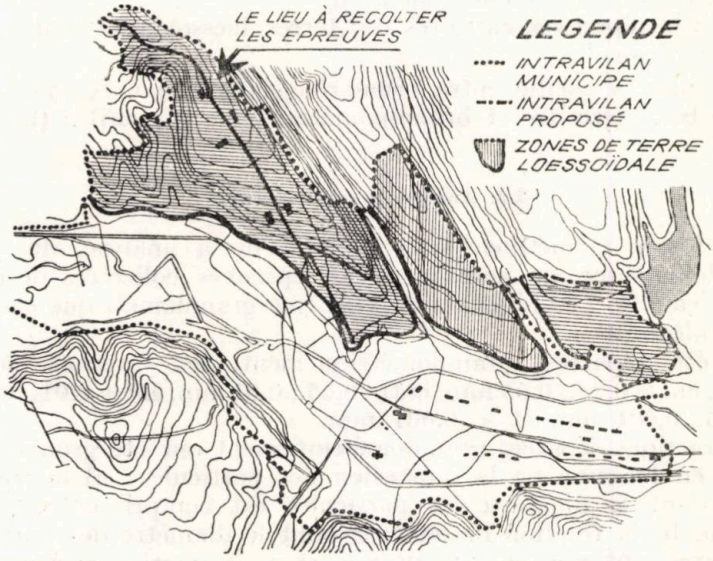


Fig. 1. — Le lieu à recolter les épreuves et les zones des terres loessoïdalles dans la ville de Jassy.

tion des caractéristiques spécifiques des terres loessoïdalles de Jassy ; il résulte, donc, que les mesures constructives pour l'insensibilisation de ces terres seront différentiées par rapport aux autres régions similaires du pays.

Pour pouvoir interpréter et expliquer les résultats obtenus, à l'échelle naturelle ou au laboratoire, nous avons orienté nos recherches vers ceux à l'échelle microscopique.

Compte tenu de l'influence de la fraction argileuse du point de vue qualitatif et quantitatif exercée sur les propriétés géotechniques des terres, nous nous sommes proposés, dans ce travail, de déterminer la composition minéralogique d'une série d'épreuves de terres loessoïdalles.

Les épreuves ont été récoltées de la terrasse supérieure de la coline de Copou, à proximité des nouvelles constructions de la Faculté de Médecine Vétérinaire.

Les deux profils dont on a récolté les épreuves sont emplacés à environ 100 m distance.

2. Étude des propriétés physiques

2.2. Caractéristiques visuelles

Les épreuves récoltées ont l'apparence des terres loessoïdalles caractérisées par un nombre de macropores variable d'une épreuve à l'autre.

Dans une série des épreuves (les épreuves *B*, *3*), on a observé des poupées de calcaire de 1 cm dimension.

Toutes les épreuves extraites des terres loessoïdalles ont manifesté sensibilité à l'eau.

La couleur a oscillé entre brune-rougeâtre et jaune, pour le profil *1*, et entre brune-grisâtre et brune-jaunâtre, pour le profil *2* (tableau 1).

2.2. Analyse granulométrique

En utilisant la méthode à la pipette, on a analysé, du point de vue granulométrique, un nombre de 10 épreuves collectées de ces deux profils (tableau 1). Les résultats de l'analyse granulométrique sont donnés dans le tableau 2.

Ont été séparées, granulométriquement, les fractions suivantes : $>$0,25 mm, entre 0,25...0,05 mm, entre 0,05...0,01 mm, entre 0,01...0,005 mm, entre 0,005...0,001 mm et $<$ 0,001 mm.

Les fractions séparées granulométriquement ont été groupées en trois catégories, en fonction de la dimension des particules : a) la fraction sablonneuse, dont le diamètre des particules est compris entre $>$ 0,25 mm et 0,05 mm, b) la fraction limonneuse dont le diamètre des particules est compris entre 0,05 mm et $<$ 0,005 mm et c) la fraction argileuse dont le diamètre des particules est de 0,05 mm.

Tableau 1

Composition granulométrique. Méthode à la pipette

Profil	Épreuve	Sable		Limon		Argile		Classification granulométrique
		> 0,25 mm	0,25... 0,05 mm	0,05... 0,01 mm	0,01... 0,005 mm	0,005... 0,001 mm	< 0,001 mm	
1	A	1,06	17,47	54,27	23,91	3,02	0,27	limon sablonneux
		18,53		78,18		3,29		
	B	0,98	17,43	55,50	22,87	2,49	0,23	limon sablonneux
		18,41		78,87		2,72		
	C	1,96	19,68	44,47	27,03	5,91	0,95	limon sablonneux-argileux
		21,64		71,50		6,86		
	D	2,77	8,61	52,63	29,85	5,40	0,74	limon sablonneux-argileux
		11,38		82,48		6,14		
2	1	1,80	25,58	50,60	19,03	2,72	0,27	limon sablonneux
		27,38		69,63		2,99		
	2	0,93	18,51	55,22	21,86	3,15	0,33	limon sablonneux
		19,44		77,08		3,48		
	3	2,69	28,64	46,38	19,73	3,22	0,34	limon sablonneux
		31,33		66,11		3,53		
	4	0,81	17,34	48,72	26,84	5,49	0,80	limon sablonneux-argileux
		18,15		75,56		6,29		
	5	0,55	3,06	26,76	42,37	19,54	7,72	limon argileux
		3,61		69,13		27,26		
	6	1,63	4,09	24,93	37,95	20,44	10,96	limon argileux
		5,72		62,88		31,40		

On constate, compte tenu des résultats obtenus, que le contenu de la fraction sablonneuse est très variable dans le cadre des épreuves analysées, à savoir entre 3,61% (épreuve *6*) et 82,48% (épreuve *D*) ; cette épreuve ne présente pas des variations importantes.

La fraction argileuse présente des variations importantes ; son contenu varie entre 2,72% (épreuve *B*) et 31,40% (épreuve *6*).

Bien que dans le cadre de la fraction sablonneuse et aussi de la fraction argileuse on obtient des variations importantes pour les épreuves analysées, considérées en ensemble, pourtant cettes variations sont normales, ayant en vue la profondeur à la quelle ont été récoltées les diverses épreuves. Au fur et à mesure que la profondeur s'agrandit, la fraction sablonneuse baisse et la fraction argileuse augmente.

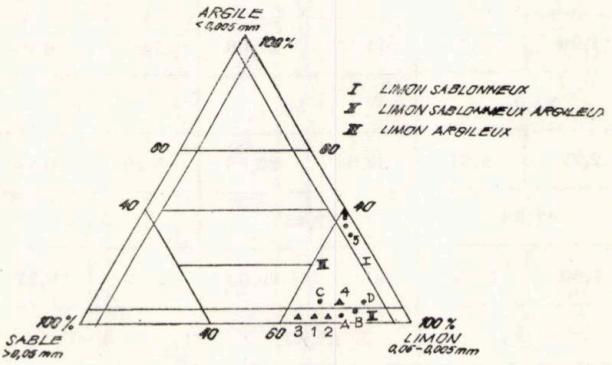


Fig. 2. — Le diagramme ternaire de classification granulométrique.

En projétant les résultats de l'analyse granulométrique dans le diagramme ternaire de classification des roches sablonneuses-limonneuses-argileuses, élaborée par R u h i n (1956), on constate que toutes les épreuves se situent dans le coin de la fraction sablonneuse (fig. 2), faisant partie de la groupe des limones sablonneux, sablonneux-argileux et argileux.

Conformément à la classification des terres loessoïdalles proposée par M o r u z o v (normatif $C_7/67$), les épreuves analysées font partie de la groupe des loess, cettes terres étant faible argileuses (épreuves *A*, *B*, *1*, *2*, *3*) et argileuses (épreuves *C*, *D*, 4).

2.3. Limites de plasticité et d'humidité naturelle

La limite inférieure de plasticité a été déterminée par la méthode à cylindres de terre ; la limite supérieure — par la méthode à la coupe (C a s a g r a n d e).

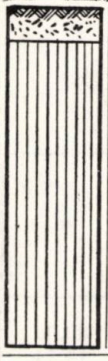
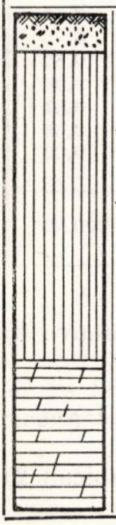
Ont été effectuées, pour chaque épreuve, deux déterminations, en considérant comme valeur finale leur moyenne arithmétique.

La plasticité (I_p) des épreuves analysées varie entre les limites 19,8 et 28,5, pour le profil *1*, et entre 19,2 et 25, pour le profil *2* (tableau 2).

Du point de vue de la plasticité ces terres appartiennent à la catégorie de plasticité moyenne ($10 < I_p \leqslant 20$) et grande ($20 < I_p \leqslant 35$).

Tableau 2

Caractéristiques géotechniques

Profil géologique	Profondeur m	Épreuve	Caractéristiques visuelles	Limites de plasticité et humidité	I_p	I_c
			terre végétale			
	1,00	*A*	loess brun roux, macropores, sensible à l'eau	20,1 23,1 42	21,9	0,86
	2,10	*B*	loess jaune foncé, poupées de calcaire (1 cm), macropores, sensible à l'eau	15,2 18,4 35	19,8	0,83
	3,50	*C*	loess brun roux, macropores, sensible à l'eau	18,5 22,4 47	28,5	0,86
	4,50	*D*	loess jaune, peu de macropores, beaucoup de carbonate, sensible à l'eau	17,6 19 40,2	22,6	0,94
			Profil *2*			
			terre végétale			
	1,50	*1*	loess brun grisâtre, beaucoup de calcaire, macropores, sensible à l'eau	17,1 19,7 41	23,9	0,89
	2,50	*2*	loess brun roux foncé, macropores, sensible à l'eau	16,8 19 36	19,2	0,88
	3,00	*3*	loess brun foncé, poupées de calcaire, macropores, sensible à l'eau	18,2 22,8 42	23,8	0,81
	4,50	*4*	loess brun jaunâtre, peu de macropores, sensible à l'eau	20 25,1 45	25	0,79
	5,00	*5*	argile grasse, jaune, avec des intercalations violacées	19 27,1 55	36	0,77
	7,00	*6*	argile grasse, jaune-violacée	18,1 26,2 49	30,9	0,74

En analysant l'état de consistance du point de vue quantitatif, à l'aide de l'indice de consistance, on a constaté que les terres loessoïdalles analysées présentent un état plastique épais.

L'indice de consistance, qui est l'expression de l'humidité naturelle en relation avec les valeurs des limites, varie très peux dans les deux profils mentionnés (0,79...0,94, tableau 2).

L'humidité naturelle varie entre 18,4% et 23,1%, pour le profil *1*, et entre 19% et 25,1%, pour le profil *2* (tableau 2).

3. Étude de la composition chimique

On a analysé, du point de vue chimique, un nombre de sept épreuves, dont les résultats sont indiqués dans le tableau 3.

Tableau 3

Composition chimique

Épreuve / Oxydes, [%]	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
SiO_2	58,47	60,42	60,74	58,99	52,82	52,36
Al_2O_3	9,62	11,03	13,22	11,38	16,69	14,54
Fe_2O_3	0,90	1,16	2,03	0,56	0,69	0,70
FeO	4,66	3,82	2,79	3,31	4,47	5,45
MgO	0,63	0,68	1,58	0,82	0,83	3,14
CaO	8,96	6,79	4,63	8,71	6,65	6,95
Na_2O	0,84	0,93	0,79	1,14	0,93	0,82
K_2O	1,93	2,02	2,05	2,17	3,02	2,90
TiO_2	0,65	0,65	0,64	0,48	0,68	0,61
H_2O (105°C)	3,71	4,27	4,95	3,02	3,95	3,63
Pertes à calcination	10,08	8,40	7,09	10,29	9,96	9,09
Total	100,45	100,17	100,51	100,88	100,69	100,22

On constate que le contenu en SiO_2 varie entre 52,86% (épreuve *6*) et 60,74% (épreuve *3*).

Le contenu, plus élevé en silice, des épreuves *1*, *2*, *3* et *4*, est explicable, ayant en vue que ces épreuves représentent des limons sablonneux (*1*, *2*, *3*) et limons sablonneux-argileux (*4*), (tableau 2).

Le contenu en SiO_2 des profils argileux (épreuves *5*, *6* — tableau 2) est beaucoup plus réduit, il varie entre 52,36% et 52,82%.

Le contenu en aluminium est plus réduit pour les profils sablonneux, en variant entre 9,62% et 13,22%, et plus élevé pour les profils argileux, (14,57...16,69%).

En ce qui concerne le fer ferrique, on constate un pourcentage plus élevé dans les profils sablonneux, en variant entre 0,90% et 2,03%, et plus réduit dans les profils argileux et sablonneus-argileux (0,56...0,70%).

Le fer ferreux ne présente pas de variations différentes dans le cadre des deux groupes des épreuves analysées, étant contenu entre 2,79% et 5,45%. Dans toutes les épreuves analysées prédomine le fer ferreux par rapport au fer ferrique.

À l'exception de l'épreuve *6*, toutes les autres épreuves ont le contenu en MgO en perfecte concordance avec celui en Al_2O_3, tous les deux en étant en corrélation avec la nature du minéral argileux.

En ce qui concerne le contenu en CaO, en général, on observe que celui des profils argileux est plus réduit par rapport aux limons sablonneux. Le contenu en CaO dépend surtout du lieu d'où a été collectée l'épreuve. Il est dû à l'accumulation de carbonates à différents niveaux du profil du sol.

Le contenu en Na_2O ne présente pas des variations dans le groupe des épreuves analysées (pour les limons sablonneux et argileux); il varie entre 0,82% et 1,14%.

Le contenu en K_2O est beaucoup plus élevé pour les profils argileux, en variant entre 2,90% et 3,02%, par rapport aux profils sablonneux et sablonneux-argileux, pour les quels il varie entre 1,93% et 2,17%. Le potassium est retenu par les minéraux argileux (par rapport au sodium, qui n'est pas retenu), faisant partie aussi de la constitution même des minéraux.

En analysant les pertes à calcination, on constate que les profils étudiés ont un comportement identique.

L'étude chimique met en évidence que les épreuves analysées présentent une composition très semblable, en pouvant considérer, de la sorte, que la zone à récolter est constituée par des formations entremêlées.

4. Étude minéralogique

Pour déterminer les minéraux argileux qui font partie de la structure des terres loessoïdalles, on a effectué une série d'analyses spécifiques, comme, par exemple, l'analyse thermodifférentielle et l'analyse en spectre infrarouge.

4.1. Analyse thermo-différentielle

On a analysé, du point de vue thermo-différentiel, un nombre de 4 épreuves, 3 provenant des terres loessoïdalles *A*, *B*, *C* et 1 (épreuve *6*), d'une argile de transition, en utilisant la fraction argileuse, séparée granulométriquement, dont le diamètre est $< 0{,}005$ mm.

L'analyse thermique a été effectuée à l'aide d'un dérivatographe Paulik, Paulik et Erday M-O-M, Budapest.

Le poids de l'épreuve utilisée pour l'analyse a varié entre 247 et 299 mg, la vitesse de chauffage a été de 11°C/min et la température maximum atteinte a été de 980°C.

Pour les épreuves *B*, *C* et *6* on a utilisé la sensibilité 1/10, et pour l'épreuve *A*, la sensibilité 1/3.

Les représentations graphiques des analyses concernant les épreuves analysées sont données dans la fig. 3. Toutes les épreuves présentent plusieurs effets endothermes d'une intensité réduite. Le premier effet endotherme se produit entre 70°C (épreuve *A*) et 125°C (épreuve *6*). Cet effet est caractéristique pour les minéraux argileux de la groupe de hydromica (l'illite) et pour les minéraux de la groupe de montmorillonite ; c'est le dégagement de l'eau d'absorbtion qui produit cet effet.

Le deuxième effet endotherme, d'une intensité également réduite, a lieu à une température comprise entre 520°C (épreuve *A*) et 580°C (épreuve *6*). Cet effet est dû à la perte de l'eau structurale et il est caractéristique à l'illite.

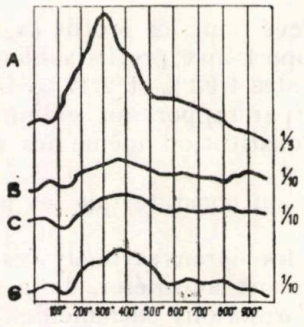


Fig. 3. — Les courbes D.T.A. pour les fractions fines argileuses.

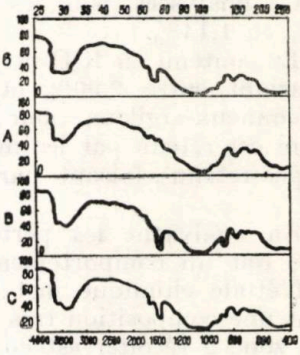


Fig. 4. — Les spectres en infra-rouge des fractions fines argileuses.

Le troisième effet endotherme, d'une intensité parfois plus accentuée se manifeste à une température comprise entre 750°C (épreuve *6*) et 820°C (épreuve *3*). Cet effet est dû à la perte partielle du groupement OH de la structure réticulaire ; il est spécifique aux minéraux argileux de la groupe de montmorillonite.

Autour de la température de 900°C se produit, aux épreuves *C*, *B* et *6*, un nouvel effet endotherme, d'une intensité parfois très réduite, qui est aussi caractéristique à l'illite et est dû à la décomposition du réseau cristalline.

On peut affirmer, selon les dates de l'analyse thermo-différentielle, que la fraction argileuse des épreuves analysées fait partie de la groupe de hydromica, étant un illite auquel s'ajoute une petite quantité de montmorillonite, qui n'influence pas du tout l'allure des courbes thermo-différentielles (fig. 3).

4.2. Analyse en spectre infra-rouge

L'obtention des spectres d'absorbtion en infra-rouge a été possible à l'aide du spectrophotomètre Perkin — Elmer 337, Angleterre.

Les spectres ont été étudiés pour des longueurs d'onde comprises entre 2μ et 25 μ.

La méthode d'identification des minéraux argileux par les spectres en infra-rouge est basée sur le fait que les positions des bandes sont caractéristiques aux ions isolés et leur fréquence est déterminée par la masse des atomes constituants, les forces d'interaction et la géométrie du réseau.

On a étudié les spectres en infra-rouge pour les épreuves *A*, *B*, *C*, *6* des fractions fines argileuses ($< 0{,}005$).

Les trois premières preuves sont des terres loessoïdalles récoltées à une profondeur de 1,0 ; 2,1 et 3,5 m ; l'épreuve *6* est un limon argileux dont le contenu est argileux (31,40%), tout à fait supérieur à celui des épreuves de terres loessoïdalles (2,99...6,29%).

Pour toutes cettes épreuves on peut mettre en évidence deux régions d'absorbtion caractéristiques : la première, entre 1 700...700 cm^{-1}, et la deuxième, entre 4 000...300 cm^{-1}.

La bande intense autour de 3 400 cm^{-1} est caractéristique à l'illite et au montmorillonite, en indiquant la présence des groupes OH de la structure des couches.

À 1 600 cm^{-1} on distingue, chez toutes les épreuves, une bande qui varie en intensité et représente l'eau libre qui a resté après que les épreuves ont été chauffées approximativement 24 heures à 100°C.

La bande d'absorbtion de 12,5 μ (800 cm^{-1}), qui est présente à toutes les épreuves, est une caractéristique spécifique pour l'illite.

La bande voisine, d'une intensité réduite, de 13 μ, qui est aussi présente à toutes les épreuves, est caractéristique au montmorillonite.

L'analyse des spectres en infra-rouge des quatre épreuves *A*, *B*, *C*, *6* permet d'indiquer comme minéral prépondérant l'illite, talloné, en quantité plus réduite, par le montmorillonite.

5. Conclusions

Les épreuves récoltées du loess de Jassy contiennent un pourcentage élevé de la fraction limonneuse (82,5...66,1%) et un pourcentage réduit de la fraction argileuse (7%), faisant partie, du ce point de vue, de la catégorie, plus large, des terres à macropores, du reste du pays.

Le contenu en carbonate de calcium, ayant la forme des concrétions calcaires (poupées de calcaire), est visible dans toutes épreuves analysées. Toutes les épreuves ont présenté sensibilité à l'eau.

La variation de l'humidité autour de la valeur de 20%, qui peut parfois limiter le couche de terre sensible à l'humectation, est alternative — pour le profil *1*, et augmente — pour le profil *2*.

La valeur élevée de l'indice de plasticité (aux épreuves *A*, *C*, *D*, *1*, *3*, *4*) est justifiée aussi par l'apparition, auprès de l'illite, du montmorillonite (ce minéral argileux peut se disperser en particules très petites dont le potentiel d'absorbtion de l'eau est extrêmement grand).

La composition chimique des épreuves analysées met en évidence les caractéristiques spécifiques du loess, communes pour le loess de Jassy et aussi pour le loess des autres régions du pays : la prédominance du silicium (en moyenne 60%), un grand pourcentage de calcaire et aluminium, la présence du fer et des métals alcalins.

L'apparition du montmorillonite (minéral argileux à réseau extensible), en quantité réduite, auprès de l'illite (minéral argileux spécifique pour les loess de notre pays) peut expliquer les légères enflures à l'humectation relevées par les expériences, à l'échelle naturelle, réalisées dans la ville de Jassy.

Reçue le 31 juillet 1971

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Fondations et
de Matériaux de Construction

BIBLIOGRAPHIE

1. Silion T. et collab., *Particularităţile constructive ale pămînturilor loessoide din zona oraşului Iaşi.* A doua Conferinţă de Geotehnică şi Fundaţii, Buc., Vol. I, 417—429 (1971).
2. Bally R., Antonescu I., *Loessurile în construcţii.* Ed. Tehn., Buc., 1971.
3. Grim, R., *Applied Clay Mineralogy.* New York, 1964.
4. Arcan L., Antonescu I., *Sur les relations entre la composition minéralogique et quelques propriétés techniques des terrains loessoides.* VIIIe Congrès International de la Science du sol, 1964.

CERCETĂRI PRIVIND PROPRIETĂŢILE FIZICE ŞI CARACTERISTICILE CHIMICO-MINERALOGICE ALE LOESSULUI DIN ORAŞUL IAŞI

(Rezumat)

Cercetările efectuate, pe probele de loess recoltate de pe dealul Copoului, indică unele caracteristici specifice loessului: conţinut ridicat al fracţiunii prăfoase, procent redus al fracţiunii argiloase, conţinut ridicat de carbonat de calciu (păpuşi de calcar) şi sensibilitate la apă.

Compoziţa chimică relevă caracteristicile loessurilor : predominarea siliciului, procentaj mare de calcar şi aluminiu, prezenţa fierului şi a metalelor alcaline.

Analizele mineralogice au indicat ca mineral argilos preponderent illitul, alături de care apare, în cantitate mică, montmorillonitul. Acest fapt poate explica uşoarele umflări la umezire evidenţiate de experimentările la scară naturală realizate în oraşul Iaşi.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1—2, 1972
Secţia V
CONSTRUCŢII, ARHITECTURĂ

C. Z. 625.8

INFLUENŢA MĂRIMII DEFORMAŢIEI ASUPRA MODULULUI DE RIGIDITATE ÎN CAZUL UNEI MIXTURI DE MORTAR ASFALTIC *)

DE

C. PLĂCINTĂ

1. Introducere

Sistemele rutiere suple, care au în alcătuirea lor straturi asfaltice, îşi schimbă proprietăţile în decursul unui an; iarna, la durate mici de aplicare a solicitărilor, se comportă elastic, iar vara, la tempraturi mari şi durate mari, viscoelastic. Eforturile înregistrate în straturile rutiere depind de elasticităţile dinamice relative ale acestora, în funcţie de creşterea de temperatură.

Cedarea straturilor asfaltice poate fi cauzată de deformarea plastică sau de fisurarea din oboseală, ca urmare a deformaţiilor de tensiune excesive de la partea inferioară a stratului, ce sînt funcţie de temperatură, durata solicitării, numărul de aplicaţii ale sarcinii, etc [1], iar modulul de rigiditate, care caracterizează straturile bituminoase, trebuie corelat cu factorii menţionaţi.

2. Partea experimentală

2.1. Mixtura de mortar asfaltic realizată cu 10% bitum (80/120 grade penetraţie) a prezentat: rezistenţa la compresiune de 65,30 kgf/cm^2 la temperatura de + 22°C şi 22,30 kgf/cm^2 la + 50°C; densitatea aparentă 2,190 g/cm^3; absorbţia de apă în volum de 4,50%. Aceste valori sînt obţinute pe epruvete cilindrice cu $h = d = 5$ cm.

2.2 Încercările s-au efectuat pe corpuri de probă paralelipipedice, încastrate la o extremitate şi supuse în capătul liber la o deformaţie alternantă de formă sinusoidală, cu ajutorul unui dispozitiv de flexiune cu bară [2].

2.3. Frecvenţele alese, de 3,3; 6,6 şi 13,2 Hz, nu sînt cele ale trecerii unui vehicul pe şosea, ci sînt legate îndeosebi de viteza de aplicare a solicitării.

---

*) Prezentată la sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, 2—4 iulie 1970.

2.4. Domeniul de temperaturi în care s-au efectuat încercările a fost cuprins între + 5° şi + 23°C, pentru a se constata variaţia modulului de rigiditate în vecinătatea temperaturii medii de + 10°C.

2.5. Mărimea extremă a deformaţiei relative este $7{,}64.10^{-4}$. Prin acest ordin de mărime nu înseamnă că încercarea are o valoare absolută, deoarece nu este posibil de extrapolat numărul de aplicaţii ale solicitării la un număr de treceri ale vehiculelor pe drum. În schimb se consideră că încercarea permite determinarea unei valori comparabile a mărimii deformaţiei straturilor bituminoase, care constituie o referinţă cunoscută în practică [3].

3. Rezultatele încercărilor

3.1. În urma cercetărilor efectuate de G. S a y e g h [3] s-a constatat că modulul de rigiditate al unui beton bituminos are o variaţie liniară pentru deformaţii foarte reduse (2.10^{-5}). Pentru valori mai mari ale deformaţiei, acesta creşte mai repede decît efortul, ceea ce antrenează obţinerea unor valori ale modulului de rigiditate inferioare celor din domeniul liniar.

Dacă se admite o variaţie biliniară a modulului de rigiditate, pe baza ecartului de la liniaritate şi a modulului liniar, se poate stabili modulul secant (fig. 1).

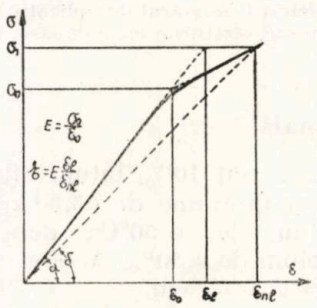


Fig. 1. — Variaţia biliniară a modulului de rigiditate.

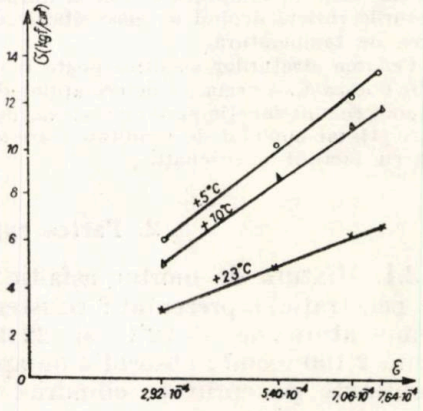


Fig. 2. — Dependenţa σ — ε cu temperatura.

3.2. Pentru o durată dată de aplicare a deformaţiei, în sistemul de coordonate σ — ε (fig. 2), în domeniul $2{,}92.10^{-4}...7{,}64.10^{-4}$ al deformaţiilor studiate, efortul de întindere din încovoiere, în cazul buclei primare de efort cînd acesta nu este influenţat de numărul de cicluri aplicat, are o variaţie aproximativ liniară.

Se constată că temperatura acționează în sensul reducerii efortului pentru o deformație dată, deci în sensul reducerii modulului de rigiditate.

3.3. Mărimea duratei de aplicare a deformației (fig. 3) influențează de asemenea efortul, în sensul că la durate mai mici rezultă eforturi mai mari, aspect caracteristic comportării viscoelastice a materialului.

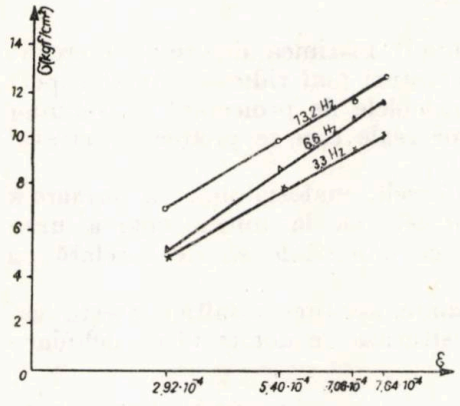


Fig. 3. — Dependența $\sigma - \varepsilon$ funcție de durata de aplicare a solicitării.

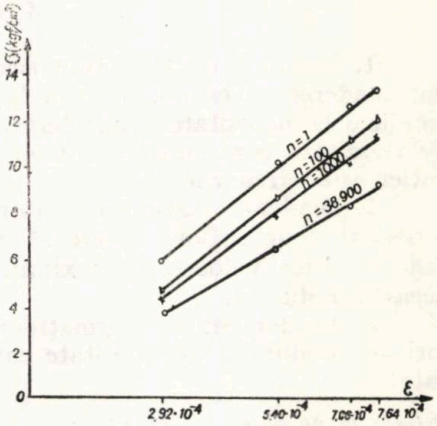


Fig. 4. — Dependența $\sigma - \varepsilon$ funcție de numărul de cicluri aplicat.

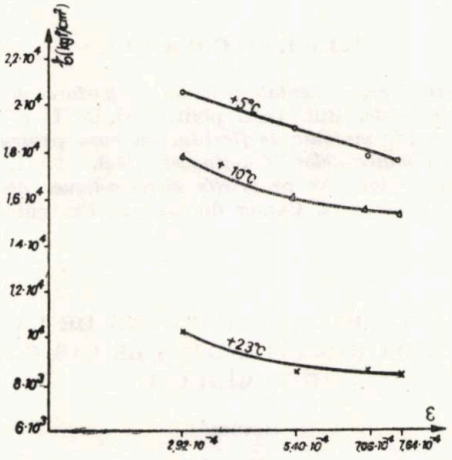


Fig. 5. — Variația modulului de rigiditate cu mărimea deformației.

3.4. Deoarece variațiile efortului de la un ciclu la altul sînt extrem de mici, diferența între ele aflîndu-se sub limita posibilităților de măsurare de care s-a dispus, se prezintă această variație la salturi mari de cicluri (fig. 4).

3.5. Modulul de rigiditate, funcţie de mărimea deformaţiei la diferite temperaturi (fig. 5), pentru o durată de aplicare a deformaţiei date, variază după o curbă cu concavitatea îndreptată în jos, tinzînd către valori reduse cînd deformaţia creşte.

4. Concluzii

1. Modulul de rigiditate scade cu cît mărimea deformaţiei creşte, dar scăderea sa este mai lentă la temperaturi mai ridicate. Acest aspect conduce la necesitatea considerării în calculele de proiectare a modulilor de rigiditate corespunzători deformaţiilor reale care se produc în stratul rutier sub circulaţie.

2. Scăderea rezistenţei datorată oboselii materialului, ca urmare a repetării solicitărilor, sugerează necesitatea ca la dimensionarea unui sistem rutier valoarea deflexiunii elastice admisibile să fie corelată cu această reducere.

3. În domeniul deformaţiilor studiate, mixtura asfaltică atestă valori ale modulului de rigiditate care se situează în domeniul de neliniaritate.

Primită la 20 noiembrie 1971

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de drumuri şi poduri

BIBLIOGRAFIE

1. Plăcintă C., *Cercetări experimentale privind comportarea uneor mixturi bituminoase la solicitări repetate.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XVII (XXI), *1—2* (1971).
2. Plăcintă C., *Dispozitiv mecanic de flexiune cu bară pentru simularea fenomenului de oboseală a materialelor bituminoase.* Bul. de Inform. Tehn., *9* (1971).
3. Sayegh G., *Détermination des propriétés viscoélastiques des bétons bitumineux par vibrations longitudinales.* Cahier du Groupe Français d'Étude de Rhéologie, II, *1* (1969).

INFLUENCE EXERCÉE PAR LA GRANDEUR DE LA DÉFORMATION SUR LE MODULE DE RIGIDITÉ, DANS LE CAS D'UNE MIXTURE BITUMINEUSE

(Résumé)

L'étude effectuée, basée sur un materiel expérimental, présente les aspects qui résultent du comportement d'un type de mixture bitumineuse aux sollicitations dynamiques, dans des conditions données de température et de durée d'application de la solicitation.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1—2, 1972
Secția V
CONSTRUCȚII, ARHITECTURĂ

C. Z. 526

ASUPRA MĂRIRII PRECIZIEI ÎN CALCULUL COORDONATELOR PUNCTELOR DETERMINATE PRIN INTERSECȚII ÎNAINTE

DE

EUGEN POPA, IULIAN BARBĂLATĂ, GH. GAVRILOV, CALISTRU APREUTESEI și GH. NISTOR

1. Pentru rezolvarea pe cale analitică a intersecțiilor înainte sînt frecvent folosite în producție relațiile ce permit utilizarea mașinii de calcul. Sînt cunoscute cele două grupe de formule avînd ca linie trigonometrică fie tangenta fie cotangenta orientărilor (obținute direct din observații sau prin calcul) și coordonatele absolute ale punctelor cunoscute.

Coordonatele noului punct P sînt astfel date de formulele (fig. 1):

$$x_p = \frac{y_2 - y_1 + x_1 \operatorname{ctg} \theta_1 - x_2 \operatorname{ctg} \theta_2}{\operatorname{ctg} \theta_1 - \operatorname{ctg} \theta_2}, \tag{1.1}$$

$$y_p = (x_p - x_1) \operatorname{ctg} \theta_1 + y_1 = (x_p - x_2) \operatorname{ctg} \theta_2 + y_2, \tag{1.2}$$

$$y_p = \frac{x_2 - x_1 + y_1 \operatorname{tg} \theta_1 - y_2 \operatorname{tg} \theta_2}{\operatorname{tg} \theta_1 - \operatorname{tg} \theta_2}, \tag{1.3}$$

$$x_p = (y_p - y_1) \operatorname{tg} \theta_1 + x_1 = (y_p - y_2) \operatorname{tg} \theta_2 + x_2. \tag{1.4}$$

Este ales grupul de formule convenabil funcție de orientările vizelor spre a folosi valorile naturale cele mai mici și se stabilește ordinea punctelor (*1*, *2*) pentru ca numitorul să fie pozitiv.

2. Dacă se împart cele două grupe cu $\operatorname{ctg} \theta_1$ respectiv $\operatorname{tg} \theta_1$ se obțin alte două grupe (2.1), (2.2), care conțin $\operatorname{ctg} \theta_2$ și $\operatorname{tg} \theta_1$ respectiv (2.3), (2.4) cu $\operatorname{ctg} \theta_1$ și $\operatorname{tg} \theta_2$ și anume :

$$x_p = \frac{(y_2 - y_1) \operatorname{tg} \theta_1 + x_1 - x_2 \operatorname{ctg} \theta_2 \operatorname{tg} \theta_1}{1 - \operatorname{ctg} \theta_2 \operatorname{tg} \theta_1}, \tag{2.1}$$

$$y_p = \frac{x_p - x_1}{\operatorname{tg} \theta_1} + y_1 = (x_p - x_2) \operatorname{ctg} \theta_2 + y_2, \tag{2.2}$$

$$y_p = \frac{(x_2 - x_1)\operatorname{ctg}\theta_1 + y_1 - y_2 \operatorname{tg}\theta_2 \operatorname{ctg}\theta_1}{1 - \operatorname{tg}\theta_2 \operatorname{ctg}\theta_1}, \tag{2.3}$$

$$x_p = \frac{y_p - y_1}{\operatorname{ctg}\theta_1} + x_1 = (y_p - y_2)\operatorname{tg}\theta_2 + x_2. \tag{2.4}$$

Formulele astfel modificate pot fi utilizate la alegere, funcție de valorile orientărilor, după cum este mai avantajos a lua cotangenta unei orientări și tangenta celeilalte sau invers, numerotarea fiind generală, adică (*1*) pentru primul punct și (*2*) pentru al doilea.

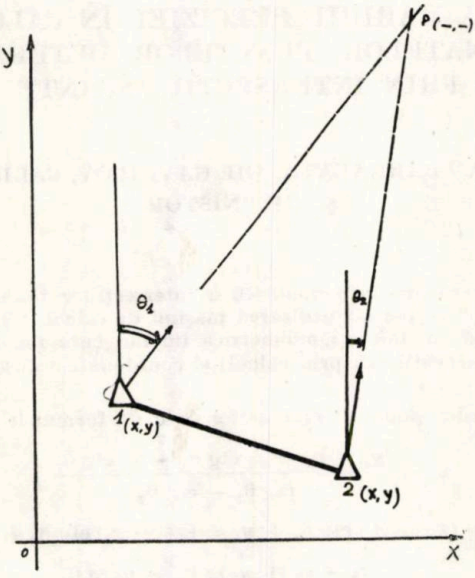


Fig. 1

Numitorul este pozitiv, întrucît produsul este subunitar (în cazuri speciale poate fi și negativ). În caz contrar intersecția nu se încadrează în condițiile date în normative referitor la unghiuri.

Se pot folosi însă în locul relațiilor (2.2) și (2.4) expresii analoge cu (2.1) și (2.3) deduse în mod similar:

$$y_p = \frac{y_2 - y_1 \operatorname{tg}\theta_1 \operatorname{ctg}\theta_2 - (x_2 - x_1)\operatorname{ctg}\theta_2}{1 - \operatorname{tg}\theta_1 \operatorname{ctg}\theta_2}, \tag{2.2'}$$

$$x_p = \frac{x_2 - x_1 \operatorname{ctg}\theta_1 \operatorname{tg}\theta_2 - (y_2 - y_1)\operatorname{tg}\theta_2}{1 - \operatorname{ctg}\theta_1 \operatorname{tg}\theta_2}, \tag{2.4'}$$

verificările putînd fi efectuate totuși și cu (2.2), (2.4).

3. Considerînd cîteva exemple practice se pot sublinia avantajele ce decurg din utilizarea formulelor astfel modificate.

Exemple practice

1° Avînd elementele intersecției înainte:

3(4433,75 ; 73813,25), (2) $\theta_{3p} = 181{,}9375$, $\operatorname{ctg}\theta_{3p} = 3{,}42965$,

4(7004,81 ; 71790,42), (1) $\theta_{4p} = 307{,}0356$, $\operatorname{ctg}\theta_{4p} = 0{,}110968$,

cu (1.1) și (1.2) se obțin coordonatele:

$$P(4957{,}30\,;\ 72017\ \begin{matrix}628)\\656\end{matrix}.$$

iar cu (2.1) și (2.2), coordonatele:

$$P(4957{,}344\,;\ 72017\ \begin{matrix}620)\\624\end{matrix}.$$

S-au ales drept linii trigonometrice:

a) pentru $\theta_{3p} = 181{,}9375$ (1) $\operatorname{tg}\theta_{4p} = 0{,}291591$,

b) pentru $\theta_{4p} = 307{,}0356$ (2) $\operatorname{ctg}\theta_{3p} = 0{,}110968$.

Diferența apărută provine de la folosirea necorectă a cotangentei în primul mod de rezolvare și anume valoarea $-3{,}42965$ (reprezentînd $\operatorname{ctg}\theta_{3p}$) nu corespunde cu $\operatorname{tg}\theta_{3p}$ (egală cu $-0{,}291591$), sau invers $\operatorname{tg}\theta_{3p} = -0{,}291591$ nu corespunde cu $\operatorname{ctg}\theta_{3p} = -3{,}42965$ căreia i-ar corespunde valoarea $-0{,}291574$.

2° Avînd elementele măsurate:

5(492,56 ; 1431,39), $\operatorname{ctg}\theta_{5p} = 112{,}2115$, $(-0{,}194205)$,

9(1246,02 ; 684,10), $\operatorname{ctg}\theta_{9p} = 370{,}1449$, $(-1{,}97370)$,

problema s-ar rezolva cu grupul (1.1), (1.2), fiind mai indicată cotangenta.

Rezultatele mai bune se obțin cu grupul (2.3), (2.4) folosind cotangenta pentru prima oreintare și tangenta pentru cea de-a doua.

4. Sînt de asemenea cunoscute și relațiile cu unghiuri mai puțin utilizate, dar totuși mai avantajoase decît primele deoarece folosesc unghiurile măsurate în loc de orientări (fig. 2):

$$x_p = \frac{y_1 - y_2 + x_2 \operatorname{ctg}\alpha + x_1 \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}, \tag{4.1}$$

$$y_p = \frac{x_2 - x_1 + y_1 \operatorname{ctg}\beta + y_2 \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}, \tag{4.2}$$

$$x_p = \frac{(y_1 - y_2)\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + x_2 \operatorname{tg}\beta + x_1 \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}, \tag{4.3}$$

$$(4.4) \qquad y_p = \frac{(x_2 - x_1)\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + y_1 \operatorname{tg}\alpha + y_2 \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}.$$

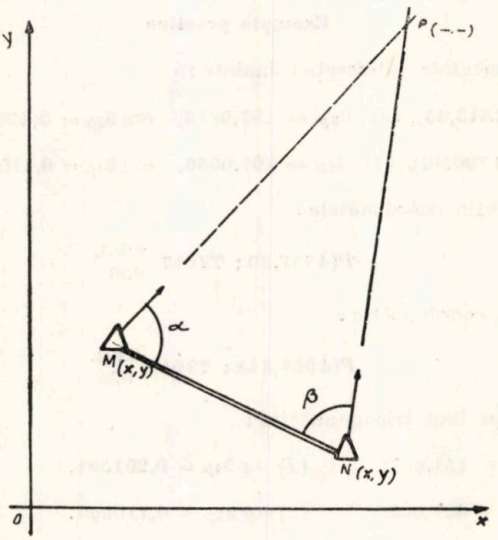


Fig. 2

5. Dacă se modifică aceste două grupe analog modului utilizat în **§2**, se obțin alte grupe de relații și anume:

$$(5.1) \qquad x_p = \frac{(y_1 - y_2)\operatorname{tg}\alpha + x_2 + x_1 \operatorname{ctg}\beta \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\beta \operatorname{tg}\alpha,},$$

$$(5.2) \qquad y_p = \frac{(x_2 - x_1)\operatorname{tg}\alpha + y_2 + y_1 \operatorname{ctg}\beta \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\beta \operatorname{tg}\alpha},$$

$$(5.3) \qquad x_p = \frac{(y_1 - y_2)\operatorname{tg}\beta + x_2 \operatorname{tg}\beta \operatorname{ctg}\alpha + x_1}{1 + \operatorname{tg}\beta \operatorname{ctg}\alpha},$$

$$(5.4) \qquad y_p = \frac{(x_2 - x_1)\operatorname{tg}\beta + y_1 + y_2 \operatorname{tg}\beta \operatorname{ctg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\beta \operatorname{ctg}\alpha},$$

prezentînd același avantaj de folosire simultană a liniilor trigonometrice favorabile (tangenta și cotangenta) pentru valorile unghiurilor măsurate în funcție de mărimile acestora.

6. Analog cu exemplele expuse în **§ 3** se pot prezenta și aici, altele, cu unghiuri măsurate care scot în evidență în mod similar grupului (2) caracterul avantajos al grupului (5) de formule.

Exemple practice

1° $\alpha = 35{,}1211$, $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}615420$, $M(3\,680{,}58\,;\ 4\,115{,}78)$,

$\beta = 66{,}4770$, $\operatorname{ctg}\beta = 0{,}581330$, $N(5\,387{,}63\,;\ 3\,466{,}85)$,

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\beta = 0{,}357752\,;$$

a) cu (4.1) și (4.2) se obține:

$$P(4\,411{,}561\,;\ 5\,231{,}969)\,;$$

b) cu (5.1) și (5.2) se obține:

$$P(4.411{,}577\,;\ 5.231{,}967).$$

2° $A(5\,678{,}89\,;\ 19\,755{,}32))$, $\alpha = 47{,}5205$,

$B(7\,106{,}12\,;\ 16\,632{,}11)$, $\beta = 77{,}5101$.

3° $M(10\,032{,}98\,;\ 39\,600{,}84)$, $\alpha = 84{,}1423$,

$N(8\,951{,}48\,;\ 39\,070{,}15)$, $\beta = 31{,}2292$.

7. Modificările aduse formulelor clasice pentru calculul intersecțiilor înainte fie cu orientări, fie cu unghiuri măsurate, îmbunătățesc metodologia actuală de calcul prin simplificări introduse în lucru, prin omogenizarea și mărirea preciziei obținerii coordonatelor. Astfel:

a) Nu mai este cazul de a alege grupul de relații cu contangentă sau tangentă, în unele cazuri ambele dezavantajoase.

b) Nu mai este necesar să se fixeze ordinea (*1*), (*2*) a punctelor pentru a avea numitorul pozitiv.

c) Formulele modificate asigură în orice situație folosirea simultană a cotangentei și tangentei avînd astfel totdeauna valorile liniilor trigonometrice cuprinse în intervalul de valori $[-1, +1]$.

d) În aceste cazuri numitorul este totdeauna pozitiv cu excepția unor cazuri care nici nu ar fi acceptate de instrucțiuni (pentru unghiuri sub limitele prescrise).

e) Ambele coordonate pot fi calculate cu relații independente fără a folosi rezultatul din prima determinare, la folosirea orientărilor.

f) Precizia rezultatelor apare evident îmbunătățită prin folosirea intervalului optim, pentru tangentă și cotangentă, evitîndu-se și situații la limită cum ar fi exemplul 2° din § **6** sau chiar exemplul 2° din § **3**.

g) Cum teoria erorilor stabilește pentru tangentă și cotangentă faptul că *erorile în calcul* — produse de erori ale unghiurilor (provenite din măsurări) — se dublează pentru valori ale acestora de 50° și crește foarte mult pentru valorile unghiurilor apropiate de 100° (fiind de 10^5 ori mai mari pentru 99°,80), avantajul noilor grupe de formule este evident.

Primită la 16 septembrie 1971

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de drumuri și poduri,
Laboratorul de topografie

BIBLIOGRAFIE

1. Botez M., *Teoria erorilor şi metoda celor mai mici pătrate.* EDP, Buc., 1961.
2. Filimon R. şi colab., *Topografie generală.* Ed. Tehn., Buc., 1958.
3. Uahant T. şi colab., *Topografie,* (trad. din l. engleză) Ed. agro-silvică, Buc., 1958.

SUR L'AUGMENTATION DE LA PRÉCISION DU CALCUL DES COORDONNÉES DES POINTS DÉTERMINÉS PAR L'INTERSECTION EN AVANT

(Résumé)

On présente quelques transformations concernant les groupes des formules classiques de l'intersection en avant, utilisées dans la détermination des points de triangulation.

Les nouvelles groupes obtenues, utilisent en même temps les deux lignes trigonometriques — tangente et cotangente, dans l'intervalle $[-1, +1]$, en assurant une augmentation de la précision dans le calcul des coordonnées.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1—2, 1972
Secția V
CONSTRUCȚII, ARHITECTURĂ

C. Z. 526

DETERMINAREA PUNCTELOR TRIPLE PRIN COORDONATE BARICENTRICE

DE

IULIAN BARBĂLATĂ, GH. GAVRILOV și EUGEN POPA

1. Introducere

Într-o lucrare anterioară primul dintre autori [2] a enunțat unele proprietăți ale coordonatelor triangulare și a stabilit relațiile matematice care permit calcularea coordonatelor rectangulare într-o formă simplificată, utile în cazul determinării punctelor geodezice prin intersecție înainte și în cazul cu vize limită.

În prezentul studiu s-a extins folosirea triunghiului în plan ca sistem de referință și în cadrul determinării punctelor geodezice calculate prin metoda punctelor triple, elaborată în anul 1960 [8].

2. Considerații generale

Introducerea noțiunilor proiective de punct la infinit și dreaptă la infinit conduce la concluzia că sistemul de referință $x0y$ poate fi considerat ca fiind constituit dintr-un triunghi în care două laturi sînt axele $0x$ și $0y$, iar a treia latură este la infinit. Drept consecință, un punct P are coordonatele:

$$P(X,\ Y,\ 1), \tag{1.1}$$

sau numere proporționale cu acestea.

Fie un triunghi oarecare ABC, în care punctul M generează triunghiurile ABM, ACM, BCM (fig. 1). Trei numere α, β, γ, proporționale cu ariile acestor triunghiuri, reprezintă coordonatele baricentrice ale punctului M; ele fiind numere algebrice, semnele lor sînt aceleași ca și în cazul coordonatelor trilatere normale.

Dacă $X_1,\ Y_1$; $X_2,\ Y_2$; $X_3,\ Y_3$ reprezintă coordonatele carteziene ale vîrfurilor triunghiului ABC, raportate la un sistem de axe rectangulare, și $X,\ Y$ coordonatele carteziene ale punctului M, raportate la același sistem de axe, atunci în conformitate cu definițiile de mai sus rezultă:

$$\alpha = \begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \beta = \begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \\ X_1 & Y_1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \gamma = \begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \end{vmatrix}, \tag{1.2}$$

sau prin însumare:

$$(1.3)\qquad \alpha+\beta+\gamma=\begin{vmatrix} X & Y & 1\\ X_2 & Y_2 & 1\\ X_3 & Y_3 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} X & Y & 1\\ X_3 & Y_3 & 1\\ X_1 & Y_1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} X & Y & 1\\ X_1 & Y_1 & 1\\ X_2 & Y_2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1\\ X_2 & Y_2 & 1\\ X_3 & Y_3 & 1\end{vmatrix}=\Delta,$$

ceea ce confirmă proprietatea coordonatelor baricentrice de a fi proporţionale cu ariile triunghiurilor generate de punctul M.

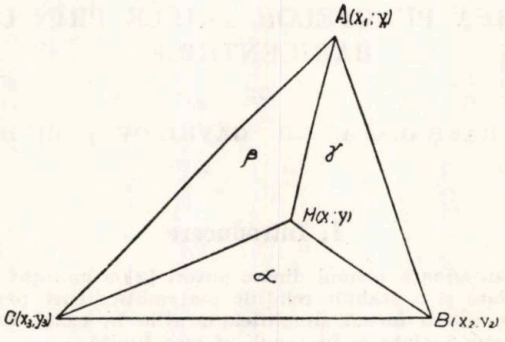


Fig. 1

Calculînd expresiile $\alpha X_1+\beta X_2+\gamma X_3$ şi respectiv $\alpha Y_1+\beta Y_2+\gamma Y_3$, se obţine:

$$(1.4)\qquad \alpha X_1+\beta X_2+\gamma X_3=X\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1\\ X_2 & Y_2 & 1\\ X_3 & Y_3 & 1\end{vmatrix}=X\Delta,$$

$$(1.4)\qquad \alpha Y_1+\beta Y_2+\gamma Y_3=Y\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1\\ X_2 & Y_2 & 1\\ X_3 & Y_3 & 1\end{vmatrix}=Y\Delta,$$

unde, în baza relaţiei (1.3), $\Delta=\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

În consecinţă corespondenţa între coordonatele carteziene şi coordonatele triangulare baricentrice va fi asigurată de relaţiile:

$$(1.5)\qquad X=\frac{\alpha X_1+\beta X_2+\gamma X_3}{\alpha+\beta+\gamma},\qquad Y=\frac{\alpha Y_1+\beta Y_2+\gamma Y_3}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Relaţiile (1.5) indică faptul că punctul M este centrul de gravitate al punctelor A, B, C, încărcate cu masele α, β, γ; punctul M tinde la infinit dacă suma $\alpha+\beta+\gamma$ tinde către 0 şi în consecinţă ecuaţia $\alpha+\beta+\gamma=0$ nu defineşte altceva decît ecuaţia dreptei improprii.

2. Determinarea punctelor triple prin coordonate triangulare baricentrice

Determinarea simultană a unui grup de trei puncte geodezice, folosind în exclusivitate măsurători unghiulare limitate, se poate efectua în condiții optime folosind următorul raționament.

Fie trei puncte geodezice de sprijin A, B, C, de coordonate cunoscute $A(X_A, Y_A)$, $B(X_B, Y_B)$, $C(X_C, Y_C)$, și trei puncte noi P, Q, R, ale căror poziții în plan urmează a fi stabilite (fig. 2).

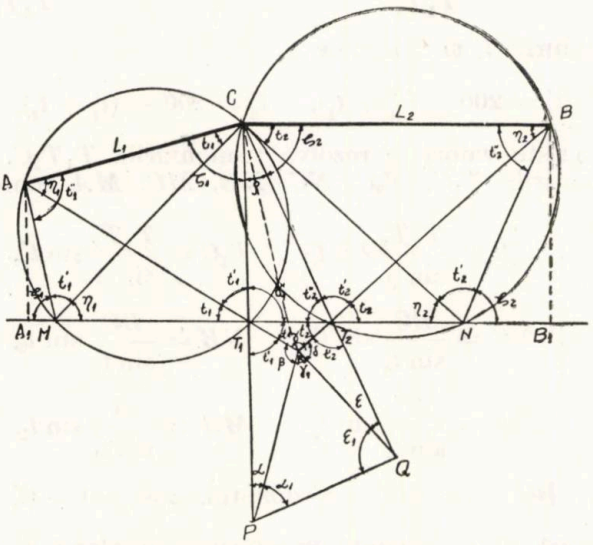


Fig. 2

Se staționează cu teodolitul în punctele P, Q, R, măsurîndu-se unghiurile α, β, γ, δ, ε, α_1, γ_1, ε_1, care corespund unui număr limitat de vize. Punctele A, B, C pot fi și inaccesibile.

Notînd cu T_1 și respectiv T_2 intersecțiile direcțiilor AR cu CP și respectiv BR cu QC se rezolvă succesiv triunghiurile PRQ, PT_1R, QT_2R, RT_1T_2 (în care se consideră o bază ipotetică $PQ = 1$), obținînd

$$(2.1) \qquad PR = \frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \gamma_1}, \qquad RQ = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \gamma_1}, \qquad PQ = 1.$$

Pe baza relațiilor unghiulare:

$$t'_1 = 200 - (\alpha + \beta), \quad t'_2 = 200 - (\delta + \varepsilon),$$

se determină și celelalte laturi ipotetice:

$$(2.2)\quad \begin{cases} RT_1 = \dfrac{PR\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad PT_1 = \dfrac{PR\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad RT_2 = \dfrac{RQ\sin\varepsilon}{\sin(\delta+\varepsilon)}, \\ QT_2 = \dfrac{RQ\sin\delta}{\sin(\delta+\varepsilon)}, \quad T_1T_2 = \sqrt{RT_1^2 + RT_2^2 - 2\,RT_1\,RT_2\cos\gamma}. \end{cases}$$

Se calculează unghiurile t_1 şi t_2, în triunghiul T_1RT_2, cu relaţiile:

$$(2.3)\quad \cos t_1 = \frac{RT_1 + RT_2\cos\gamma}{T_1T_2}, \qquad \cos t_2 = \frac{RT_2 + RT_1\cos\gamma}{T_1T_2},$$

precum şi unghiurile t_1'' şi t_2'' anume:

$$(2.4)\quad t_1'' = 200 - (t_1' + t_1), \qquad t_2'' = 200 - (t_2' + t_2).$$

Dispunînd de aceste valori se rezolvă trunghiurile T_1T_2C, NCB şi MCA, calculîndu-se laturile T_1C, T_2C, NC, NB, MC, MA conform relaţiilor:

$$(2.5)\quad \begin{cases} T_1C = \dfrac{T_1T_2}{\sin\rho}\sin t_2'', \quad T_2C = \dfrac{T_1T_2}{\sin\rho}\sin t_1'', \\ NC = \dfrac{BC}{\sin t_2'}\sin t_2'', \quad NB = \dfrac{BC}{\sin t_2'}\sin t_2, \\ MC = \dfrac{AC}{\sin t_1'}\sin t_1'', \quad MA = \dfrac{AC}{\sin t_1'}\sin t_1, \end{cases}$$

$AC = L_1$, $BC = L_2$ (din coordonate), $\rho = 200 - (t_1'' + t_2'')^2$.

Se determină din coordonate orientările dreptelor CA, CB, AB, după care se determină unghiul:

$$(2.6)\quad \varphi = \omega_C - (t_1 + t_2),$$

în care $\omega_C = \theta_{CA} - \theta_{CB}$.

Cu elementele astfel calculate, se rezolvă triunghiul NMC calculînd:

$$(2.7)\quad \begin{cases} MN = \sqrt{MC^2 + NC^2 - 2MC.NC\cos\varphi} \\ \sin\eta_1 = \dfrac{NC}{MN}\sin\varphi, \quad \sin\eta_2 = \dfrac{MC}{MN}\sin\varphi. \end{cases}$$

În conformitate cu definiţiile coordonatelor baricentrice rezultă că punctul nou R va avea următoarele coordonate (fig. 3):

$$(2.8)\quad \alpha = BR.BC\sin\eta_2, \quad \beta = AR.AC\sin\eta_1, \quad \gamma = BR.AR\sin\hat{R}.$$

Dar în triunghiul ABR sînt satisfăcute relaţiile:

$$(2.9) \qquad AR = AB\frac{\sin(\eta_2 - \omega_B)}{\sin \widehat{R}}, \qquad BR = AB\frac{\sin(\eta_1 - \omega_A)}{\sin \widehat{R}},$$

iar în triunghiul ABC sînt valabile expresiile :

$$(2.10) \qquad BC = AB\frac{\sin \omega_A}{\sin \omega_C}, \qquad AC = AB\frac{\sin \omega_B}{\sin \omega_C}$$

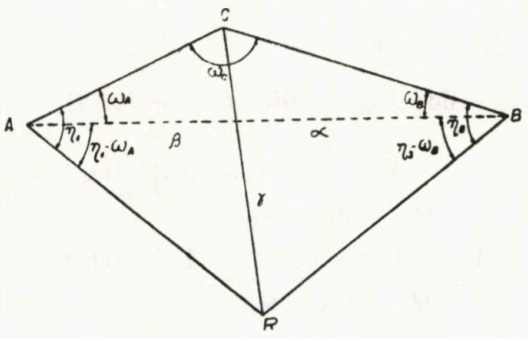


Fig. 3

Introducînd relațiile (2.9) și (2.10) în expresiile coordonatelor baricentrice (2.8), acestea devin :

$$(2.11) \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{AB^2 \sin(\eta_1 - \omega_A)\sin \omega_A}{\sin \widehat{R} \sin \omega_C} \sin \eta_2, \\ \beta = \dfrac{AB^2 \sin(\eta_2 - \omega_B)\sin \omega_B}{\sin \widehat{R} \sin \omega_C} \sin \eta_1, \\ \gamma = \dfrac{AB^2 \sin(\eta_2 - \omega_B)\sin(\eta_1 - \omega_A)}{\sin \widehat{R}}. \end{cases}$$

Substituind relațiile (2.11) în expresiile coordonatelor baricentrice (1.5), după simplificări, rezultă coordonatele carteziene definitive ale punctului nou R :

$$(2.12) \qquad X_R = \frac{Q_A X_A + Q_B X_B + Q_C X_C}{Q_A + Q_B + Q_C}, \qquad Y_R = \frac{Q_A Y_A + Q_B Y_B + Q_C Y_C}{Q_A + Q_B + Q_C},$$

în care :

$$Q_A = \sin(\eta_1 - \omega_A)\sin \eta_2 \sin \omega_A,$$
$$Q_B = \sin(\eta_2 - \omega_B)\sin \eta_1 \sin \omega_B,$$
$$Q_C = \sin(\eta_1 - \omega_A)\sin(\eta_2 - \omega_B)\sin \omega_C.$$

Este util de observat că relaţiile (2.12) au un caracter algebric şi nu necesită de fiecare dată examinarea unui caz particular al figurii.

Pentru a evita, în aplicaţiile practice, calculele laborioase, se recomandă transformarea relaţiilor (2.12) în aşa fel încît în mod practic ele să nu conţină coordonatele punctelor de sprijin, care pot avea valori mari şi foarte mari, ci numai diferenţele lor.

Dacă se introduc notaţiile:

$$\Delta X_A = X_R - X_A, \quad \Delta Y_A = Y_R - Y_A,$$

prin substituirea valorilor X_R, Y_R din relaţiile (2.12) rezultă:

$$(2.13)\quad \begin{cases} \Delta X_A = \dfrac{Q_B(X_B - X_A) + Q_C(X_C - X_A)}{Q_A + Q_B + Q_C} = \dfrac{Q_B \Delta X_{AB} + Q_C \Delta X_{AC}}{[Q]}, \\ \Delta Y_A = \dfrac{Q_B(Y_B - Y_A) + Q_C(Y_C - Y_A)}{Q_A + Q_B + Q_C} = \dfrac{Q_B \Delta Y_{AB} + Q_C \Delta Y_{AC}}{[Q]}. \end{cases}$$

Sub această formă relaţiile (2.12) se vor simplifica, devenind:

$$(2.14)\quad X_R = X_A + \frac{Q_B \Delta X_{AB} + Q_C \Delta X_{AC}}{[Q]}, \quad Y_R = Y_A + \frac{Q_B \Delta Y_{AB} + Q_C \Delta Y_{AC}}{[Q]}.$$

În mod analog şi folosind acelaşi raţionament, coordonatele punctului R se pot calcula din punctele B şi C:

$$X_R = X_B + \frac{Q_A \Delta X_{BA} + Q_C \Delta X_{BC}}{[Q]}, \qquad Y_R = Y_B + \frac{Q_A \Delta Y_{BA} + Q_C \Delta Y_{BC}}{[Q]},$$

$$X_R = X_C + \frac{Q_A \Delta X_{CA} + Q_B \Delta X_{CB}}{[Q]}, \qquad Y_R = Y_C + \frac{Q_A \Delta Y_{CA} + Q_B \Delta Y_{CB}}{[Q]}.$$

Cunoscînd coordonatele punctului nou R se rezolvă triunghiurile ACR şi respectiv CBR, calculîndu-se unghiurile $\widehat{ARC} = \hat{R}_1$ şi $\widehat{CRB} = \hat{R}_2$. Pe această cale se pot transmite orientările dreptelor RP şi respectiv RQ, punctele P şi Q urmînd a fi determinate de intersecţiile dreptelor CP cu RP şi respectiv CQ cu RQ, la care orientările dreptelor CP şi CQ vor fi date de relaţiile:

$$\theta_{RP} = \theta_{RC} - (\beta + \hat{R}_1), \quad \theta_{CP} = \theta_{CA} - \zeta_1, \quad \zeta_1 = 200 - (t_1' + \eta_1),$$

$$\theta_{RQ} = \theta_{RC} + (\hat{R}_2 + \delta), \quad \theta_{CQ} = \theta_{CB} + \zeta_2, \quad \zeta_2 = 200 - (t_2' + \eta_2).$$

3. Concluzii

Studiul întreprins privind utilizarea coordonatelor baricentrice la rezolvarea problemei punctelor triple, care face obiectul prezentei lucrări, constituie un mijloc nou în metodica măsurătorilor terestre, mărind numărul posibilităților tehnico-inginerești de rezolvare a cazurilor întîlnite în lucrările geo-topografice.

În acest mod pe lîngă aspectul practic pe care îl prezintă problema studiată, se îmbogățește și conținutul teoretic al problemelor de măsurători terestre.

Din punct de vedere teoretic se pot desprinde următoarele concluzii :

a) Caracterul algebric al relațiilor stabilite pentru determinarea coordonatelor carteziene ale punctelor geodezice permite rezolvarea oricărei situații, fie că punctul nou ce trebuie determinat se găsește în interiorul triunghiului de referință sau nu.

b) Folosirea coordonatelor triangulare sub forma de coordonate baricentrice conduce la calcule demonstrații și interpretări remarcabile și variate, corespunzînd întrutotul calculelor și formulelor algebrice folosite în geodezie.

Din punct de vedere practic se pot desprinde următoarele concluzii:

a) Relațiile obținute pentru determinarea punctelor geodezice noi, reprezentînd mediile ponderate ale coordonatelor punctelor geodezice de sprijin, conduc la concluzia certă că ele constituie cea mai probabilă poziție a punctului nou calculat și în consecință nu reclamă determinări suplimentare.

Acest aspect este subliniat și de faptul că ponderile Q_A, Q_B, Q_C conțin toate elementele obținute atît din observații cît și din calcule, inclusiv coordonatele triunghiului de referință respectiv.

b) Formulele prezintă simplitate atît prin forma cît și prin conținutul lor, iar la aplicațiile numerice, calculele sînt simplificate prin stabilirea prealabilă a coeficienților de pondere Q_A, Q_B, Q_C, care la rîndul lor exclud cazurile de ambiguitate.

c) Precizia determinării punctelor noi, comparativ cu alte metode, crește simțitor dacă se ia în considerație faptul că înseși mediile ponderate reprezintă o compensare semiriguroasă.

d) Aplicarea coordonatelor baricentrice la cazurile studiate mai sus a condus la sugestii și interpretări practice utile și în ceea ce privește rezolvarea punctelor cvadruple, a punctelor multiple, a intersecțiilor laterale, precum și a altor probleme geo-topografice, acestea constituind obiectul unui studiu ulterior.

La elaborarea acestor probleme s-a urmărit să se împletească aspectul științific cu latura practică, stabilindu-se scheme de calcul operative și mecanizate pentru mașina de calcul, iar în ceea ce privește folosirea coor-

donatelor triangulare baricentrice în producţia geo-topografică, aceasta va fi înlesnită prin introducerea unor exemple numerice şi întocmirea unor formulare de calcul.

Primită la 17 martie 1970

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de drumuri şi poduri
Laboratorul de topografie

BILIOGRAFIE

1. Apreutesei C., Barbălată I., Tudor C., *Geodezia.* Ed. agro-silvică, Buc., 1963.
2. Barbălată I., *O metodă de determinare a punctelor geodezice folosind coordonatele baricentrice.* Rev. de geodezie şi organizarea teritoriului, *2*, (1966).
3. Coşniţă C., *Coordonnées barycentriques.* Ann. Roum. de Math., Buc., 1941.
4. Filimon R. şi colab., *Topografie generală.* Ed. Tehn., Buc., 1958.
5. Jordan, Eggert, Kneissel, *Handbuch der Vermessungskunde.* Stuttgart, 1963.
6. Orăşanu C., *Curs de geodezie.* Lito, Buc., 1945.
7. Tardi P., Laclavère J., *Traité de géodésie.* Paris, 1924.
8. Martinian O., Gavrilov Gh., Apreutesei C., Barbălată I., Gavrilov L., *Metoda punctelor triple.* Lucr. şt. Inst. agr. Ion Ionescu de la Brad", Iaşi, 1960.

DÉTERMINATION DES POINTS TRIPLES PAR DES COORDONNÉES BARYCENTRIQUES

(Résumé)

On présente uue nouvelle méthode de calcul des coordonnées des points géodésiques déterminées par la méthode des points triples, en utilisant les coordonnées triangulaires barycentriques.

Les schémas classiques de calcul se simplifient, ce qui contribue à l'augmentation du rendement des travaux géodésiques.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1—2, 1972
Secţia V
CONSTRUCŢII, ARHITECTURĂ

D. C. 628.1

CONTRIBUTIONS TO THE RADIAL SETTLING TANKS

BY

LONGHIN MACAREVICI, IULIAN IONESCU, EMANOIL BÂRSAN,
M. DIMA, OLIMPIA BLĂGOI and C. MANOLE

1. Introduction

The increase of water consumption caused by the development of populated centers and industry in Romania, raised the problem of improving the methods of clarifying water, and on the other hand, the increasing of installation efficiency. In the last years for large flows there were used in a great degree the radial settling tanks which are characterized by a great productivity.

For these settling tanks there are studied in this work some modifications at the distribution of the raw water with the aim of improving the settling process.

2. Actual Solution

In the radial settling tanks the water current moves radially from the central tube of distribution to the peripherical collecting trench which is situated along the outlines of the construction. By a gradual decrease of velocity, the sedimentation of suspensions on the bottom of the settling tanks occurs. Then they are collected into a cone from the centre of the construction by means of a scraper which is continually moving with a very small velocity (3...3.5 rot/h) so that the process of settling not to be disturbed.

The disposal of the sedimentations is periodically done by opening the valve on the silt channel. For assuring the quieting of water which comes out from the supply water pipe situated in the axis of settling tanks there was set round it a spillway cilinder with a large diameter having deflector tubes or tubes of T form which assure an uniform distribution of water in the settling tank (Fig. 1). For the same purpose there are used in practice other more systems of water distribution.

As far as in the radial settling tank the velocity of water current changes from center to periphery, and on the other hand, taking into account the form of the construction, the way of water distribution, and its collecting, it may appear changes in the motion of water current and an exact hydraulic dimension it is not possible, so that to draw this type of settling tank it is necessary to make trials on the models. On the researches done in different countries it follows that for these results to be applied in nature, the scale of the model must be comprised between 1 : 3 and 1 : 6.7 and they ask for a very

expensive cost for these studies. These studies become indispensable in the case of big installations. Relying on this kind of studies some foreign houses of business (D o r r, P a t e r s o n, D é g r e m o n t a. o.) created different types of radial settling tanks with an improved productivity having the parametres unknown which were set to the base

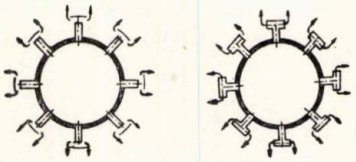


Fig. 1

of the design, the respective types of settling tanks represent personal licences. An approximate dimension of the radial settling tanks applied in practice is done in connection with the settling rate of the suspensions w which must remain into the settling tank. Taking into account this settling rate and the depth of the water at the outlet of the settling tank h (for which there are taken values between 1.5 and 3 m), it is calculated the settling time using the relation :

$$t_s = \frac{h}{w},$$

and the useful volume of the settling tank

$$V_u = Q t_s,$$

where Q is the flow of the water.

Depending on the useful volume we mesure the diameter D of the settling tank, so that the depth at the centre H not surpass 2.5...5 m and calling for the diameter of central cilinder $d = 2...5$ m :

$$V_u = f(D,\ d,\ H,\ h).$$

At last it is verified the relation D/H which must be greater than 6, and the mean velocity at the half way done by the water in the settling tank must not surpass 0,02 m/s.

The mean velocity is calculated using the relations :

$$V_m = \frac{D - d}{2t_s} \quad \text{and} \quad V_m = \frac{Q}{2\pi r_m h_m},$$

where : r_m — the radius from the axis of the settling tank to the half way distance between the center cilinder and the peripherical refuse spout,

$$r_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{(D - d)}{2} + \frac{d}{2} = \frac{D + d}{4},$$

hm — the depth of the water in the settling tank at r_m .

If the two conditions are not satisfied the calculation must be done again taking other values for h and H.

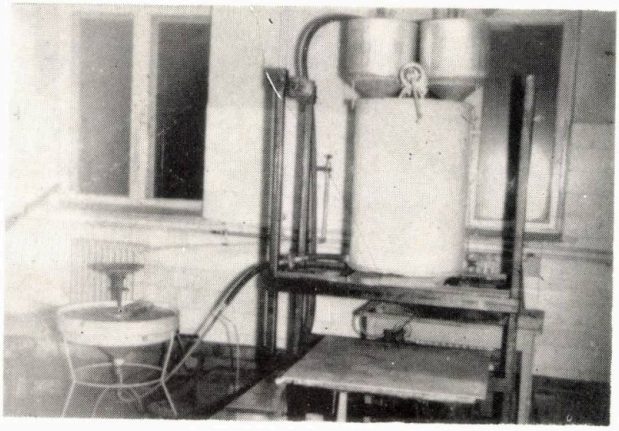


Fig. 2

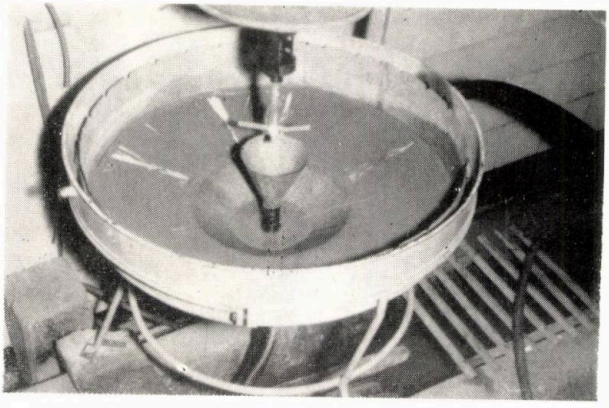


Fig. 3

3. Experimental Study

In this work there are presented the experimental results obtained in the settling process at a radial settling tank executed at a reduced scale to which there are tried different solutions for water distribution and quieting system being followed by this, the increase of productivity at this type of settling tank by reducing the suspension quantity left into water after settling and a concentration of the sedimentations towards the cone of silt collection. For this there was executed an installation for preparing raw water by introducing clay particles (33% clay, 27% dust, 40% thin sand) into water at a concentration of 1 000 mg/l, maintaining these particles in a suspension condition till water entres the settling tank with the help of a blade system which turns round a vertical axis into the supplying reservoir of the settling tank (Fig. 2).

Using different systems of water distribution and changing the flows and consequently the mean velocity into the settling tank, we had into view the changes of the gravimeter concentration suspensions left into the clarified water, making up the change diagram of these, depending on the flow. The results obtained at different systems were compared between them being established in this way the best work domain of settling tank for each system of distribution. One of the experimented distribution system consisted of a cone-shaped diffuser (Fig. 3).

By spilling water into the diffuser, we could observe around this the forming of a helicoid current which involves the solid particles towards the collecting cone of the silt (Fig. 4).

The change of the quantity of the remained suspension into the decantated water happened in the same time with the increase of the flow (s. Fig. 5, curve *a*).

In the case of great flows at the outlet of water from the diffuser, it happened an undulatory motion of water into the settling tank which

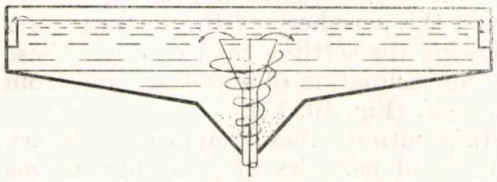


Fig. 4

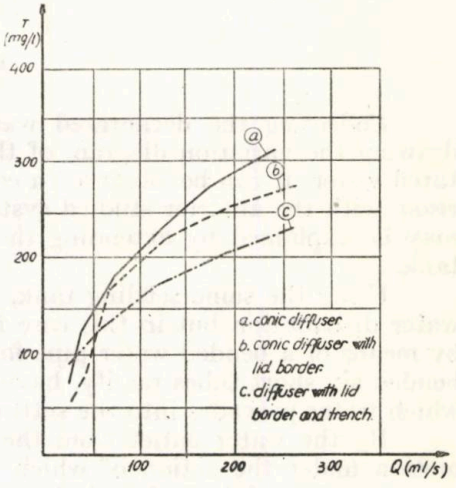


Fig. 5

has a negative effect upon the sedimentation suspension process. To obviate this phenomenon above the diffuser it was applied a circular plate of a larger diameter which has a border down-directed entering under the water surface. By applying this constructive system the undulatory motion disappears at the water surface, but in the radial plans of the settling tank it appears a circular close motion where the bottom currents are directed towards the periphery and the surface currents are directed towards the axis (Fig. 6). This motion has a negative effect upon the decantation

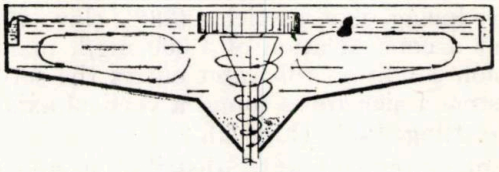


Fig. 6

process producing the stimulation of the suspensions in the peripherical drain of collecting the clear water (Fig. 5, curve *b*). This circular close motion which appears in the radial plans of the settling tank was used to improve the decantation process. For this, along the contour it was applied a collecting drain of water from the surface of the settling tank, having a motion from the periphery towards the centre (Fig. 7...9).

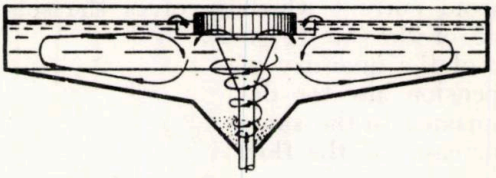


Fig. 7

Collecting the decantated water in the case of different flows and drawing the variation diagram of the suspension quantity from the decantated water it can be observed a considerable reduction of these in comparison with the anterior studied systems (Fig. 5, curve *c*). This phenomenon may be explained by extending the way covered by water in the settling tank.

Using the same settling tank, it was experimented another sytem of water distribution but in this case from the periphery of the settling tank by means of a bended water pipe following the settling tank contour; these bended six short tubes remify, having an inclination of about 45° and from which water pervades into the settling tank (Fig. 10, 11).

By the water outlet from the distribution tubes it appears a rotary motion under the action of which the solid particles of great dimensions are concentrated into the discharge funnel for silt (Fig. 11). This rotary

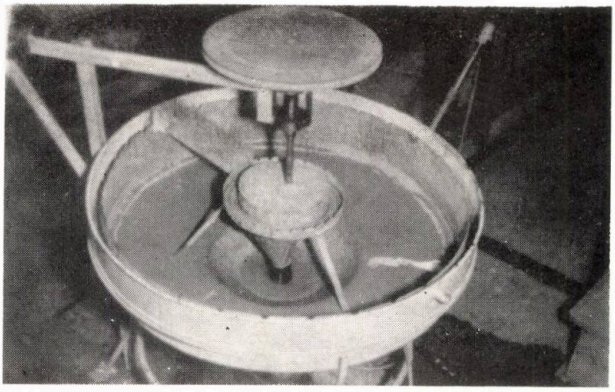


Fig. 8

Fig. 9

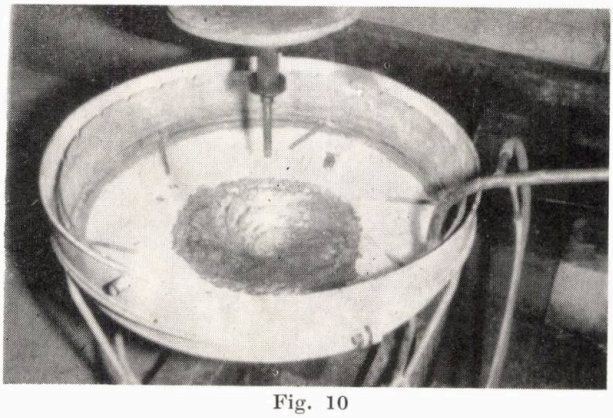


Fig. 10

motion occurs into the whole mass of water and has as result the penetration of a greater quantity of suspensions into the peripherical collecting sewer of decantated water as it can be noticed from the diagram (Fig. 12 curve *a*).

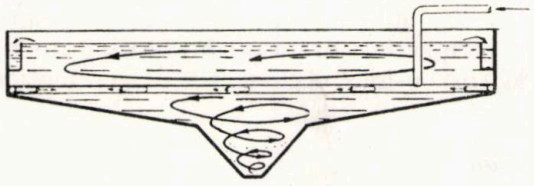


Fig. 11

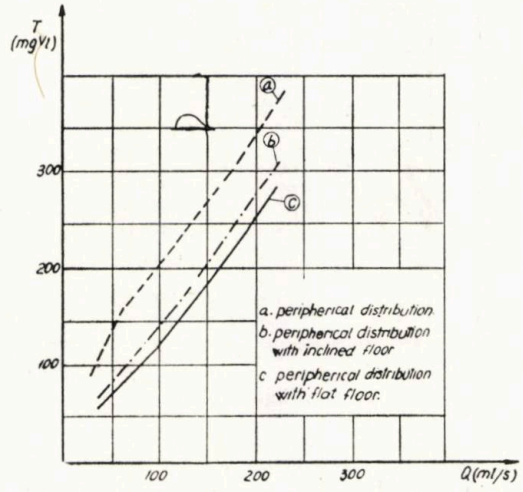


Fig. 12

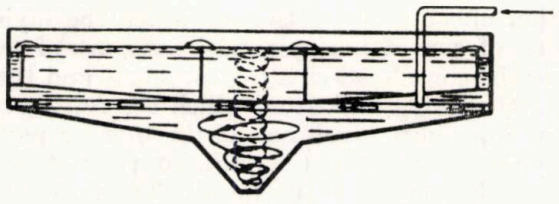


Fig. 13

For limiting the rotary water motion only at the lower part of the settling tank, it was placed over the tube of distribution a bended water pipe, a flat floor having in the middle a spillway cilinder (Fig. 13). The water motion under this floor occurs in the form of a spiral having the mo-

tion sense towards the cone for collecting silt. Under the action of this force which appears, the bigger solid particles are directed towards the cone of collecting silt (Fig. 11). Not far from the top of the cone, the current changes, the sense of motion becoming an ascending current with a helicoidal motion, stimulating with it the thin suspensions (Fig. 13). Reaching at the upper part of the cilinder, the water current continues to move radially towards the peripherical drain of the settling tank and the sedimentation of the thin suspensions occurs. The water motion straight to the

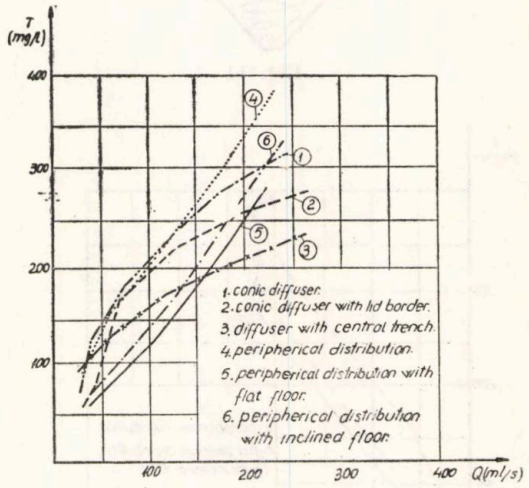


Fig. 14

collecting silt cone and in the above cylinder is similar with that motion observed at a hydrocyclone. For this installation the collecting funnel for the sediments having a plexiglass tube at the lower part facilitates to watch the cyclonic motion effect under action of which the laying down of an important quantity of suspensions occurs. That part of the settling tank under the floor can be considered as a hydrocyclone and that over it works like a common radial settling tank from which the formed sediments follow to be evacuate by oppenings which are at the inferior part of the central cylinder. These sediments represent a reduced percentage in comparison with the suspensions left into the silt funnel. The central cylinder at this type of settling tank may be used as a chamber reaction which fact would contribute in a greater degree to the improvement of sedimentation suspension process at the upper part of construction. The experiences were done with a flat floor and an inclined floor, the results being presented in the diagram from Fig. 12 (curves *b* and *c*). The presence of a greater quantity of suspensions remained into water after the decantation process

in the case of the inclined floor can be explained by the fact that the cyclonic water motion under the inclined floor is disturbed, and as a result the forces for retaining of the suspensions in the silt cone are limited.

4. Conclusions

Analysing the obtained results at the systems of water distribution in the case of used installations, from the superposing of the diagrams (Fig. 14) it results :

1. In the case of the flows, respectivelly small velocities of water motion into the settling tank (as it results from Fig. 14), the best indicated solution of water distribution which leads to the reducing of the quantity of the suspensions remained into water after the decantation process, is that with exterior supply at a settling tank, with an intermediar floor and a central cylinder (Fig. 13).

2. In the case of the great flows and respectivelly motion velocities it appears as a best solution that with the water distribution into the axis of the settling tank, having at the upper part a central circular floor with a collecting decantated water drain (Fig. 14).

The studies carried out with the settling tank model made in laboratory at a reduced scale is useful for us to draw an image upon the work way of the radial settling tank with the studied water distribution systems, with the purpose of executing a model at a great scale and which will allow us to apply the obtained results at the design of constructions with an increased efficiency.

Received, September 9, 1971

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Hydrotechnic Constructions

REFERENCES

1. Trofin P., *Alimentări cu apă.* Vol. II, EDP, Buc., 1961.
2. Pîslăraşu I., Rotaru N., Teodorescu M., *Alimentări cu apă.* Ed. Tehn., Buc., 1964.
3. Dégremont, *Mémento technique de l'eau.* Paris 1964.
4. Dinter O., *Hidrocicloanele şi folosirea lor,* (trad. din l. cehă). Ed. Tehn., Buc., 1965.

CONTRIBUŢII LA STUDIUL DECANTOARELOR RADIALE

(Rezumat)

Aducînd unele modificări în distribuirea apei brute la decantoarele radiale, s-a urmărit îmbunătăţirea procesului de sedimentare a suspensiilor şi realizarea unor construcţii cu productivitate mărită.

Se prezintă sistemele de distribuţie a apei luate în studiu şi se furnizează rezultatele experimentale obţinute în laborator pe un model de decantor radial executat la scară redusă.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1—2, 1972
Secţia V
CONSTRUCŢII, ARHITECTURĂ

УДК 628.1

К ВОПРОСЫ НАИЛУЧШЕГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ БИОЛОГИЧЕСКОЙ СТУПЕНИ НА ОЧИСТИТЕЛЬНЫХ СТАНЦИЯХ *)

М. ДИМА и ИУЛИАН ИОНЕСКУ

1. *Введение*

Загрязнение вод—явление мирового масштаба. Оно представляет собой одну из важнейших проблем современного мира, потому что ставит в опасность здаровь людей и даже, как утверждают некоторые специалисты, само существование человечества.

Накопление отбросов и различных химических продуктов, сбрасываемых в реки, озера и моря убивают живые организмы проживающие в воде. Эти отбросы убивают также и бактерии, с помощь которых происходит процесс самоочистки воды. Рост промышленной продукции во всех отраслях приводит к все большему загрязнению вод органическими, биологически разлагаемыми, или неразлагаемыми веществами, действие которых еще мало изучено и которое может весьма отравляющими [1].

Для того, чтобы предотвратить загрязнение рек, необходимо уделить особое внимание проектированию очистительных станции, в особенности строений и установок, в которых происходят биохимические процессы окисления органических веществ, приводящие к аэробной минерализации последних.

Настоящий труд является попыткой решить проблему проектирование оптимального числа ступеней биологической очистки при помощи биофильтров; такое решение приходится принимать при проектировании очистительных станции, промышленных предприятий, сбрасывающих сильно загрязненные органическими соединениями воды.

2. *Технологические схемы биологической очистки в биофильтрах*

Технологическая схема пределяет процессы очистки; поэтому, принятое проектное решение, объем и характер рециркуляции воды определяет степень очистки. Составление схемы очистки зависит от желаемой степени очистки и от употребляемого типа фильтров.

---

*) Представленный на научной сессии Ясского Политехнического Института, 2 — 4 июля 1970 г.

Для очистки сточных бытовых и промышленных вод с небольшими содержанием органических веществ, можно использовать биофильтры с малой или большой нагрузкой, с рециркуляцией воды, или без нее. На рис. 1 показана схема работы биофильтра без рециркуляции воды.

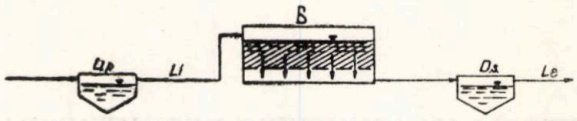


Рис. 1

В этом случае, очистительное действие фильтра можно выразить уравнением

$$L_e = eL_i, \tag{1}$$

где : L_e — количество органических веществ, выраженное в $БРК_5$ (биохимический расход кислорода при очистке в 5 дней), при выходе из биофильтра, [мч/л], L_i — содержание органических веществ в неочищенной воде, выражённое в $БРК_5$, при входе в биофильтр, [мг/л], e — коэффициент очистки биофильтра, которой зависит от продолжительности пребывания воды в биофильтре, от органической нагрузкой. В условиях безупречной эксплуатации, он может быть принят постоянными.

В случае рециркуляции воды, технологическая схема показана на рис. 2.

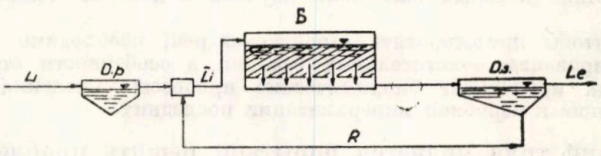


Рис. 2

В смесительной камере „сырой“ (не прошедшей еще через биофильтр) и рециркулированной воды, нагрузка органическими веществами смешанной воды выражается уравнением :

$$\overline{L_i} = \frac{QL_i + RL_e}{Q + R}, \tag{2}$$

где : Q — ежедневый наибольший дебит „сырой“ воды, R — дебит рециркуляции.

В случае одной рециркуляции воды, выражение для нагрузки очищенной воды имеет вид :

(3) $$L_e = e\,\overline{L_i},$$

Эсли предположить что имеет место K-кратная рециркуляция воды через станцию, то расчетное выражение для нагрузки органическими веществами воды при выходе из очистительной станции будет иметь вид :

(4) $$L_{e_k} = \frac{e}{1 + R(1-e)/Q}\,L_i .$$

Для очистки сточных вод с высоким степенем загрязнения органическими веществами, как например сточные воды пищевой промышлености, имеющие к тому же и большие дебиты, можно принимать различные от классических технологические схемы, с последовательным или параллельным расположением биофильтров, так чтобы коэффициент полезного действия очистительной установки был наибольшим. Все эти схемы могут быть в свою очередь, без рециркуляции или с рециркуляцией.

В случае последовательного расположения, без рециркуляции, техногическая схема показана на рис. 3.

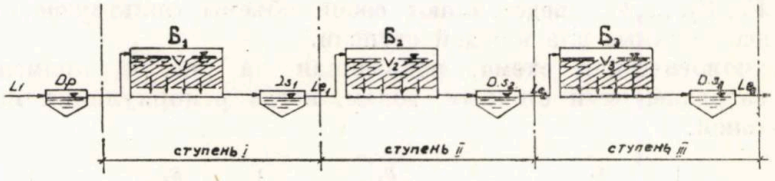


Рис. 3

Принимая гипотезу одной и той же органической нагрузки во всех ступениях, и использования одного и того же материала для заполнения биофильтров, следует, что коэффициент очистки во всех ступенях одинаков.

Обозначим через L_i, L_{e_1}, L_{e_2},..., L_{en} органические нагрузки (выраженные в БСК$_5$) вод, поступающих в ступени 1, 2, 3, ... , n.

Коэффициент очистки каждой ступени может быть выражен в следующей форме :

$$E_1 = \frac{L_i - L_{e_1}}{L_i} = 1 - \frac{L_{e_1}}{L_i} = 1 - e_1,$$

$$E_2 = \frac{L_{e_1} - L_{e_2}}{L_{e_1}} = 1 - \frac{L_{e_2}}{L_{e_1}} = 1 - e_2,$$

. . . . . .

$$E_n = \frac{L_{e_{n-1}} - L_{en}}{L_{e_{n-1}}} = 1 - \frac{L_{en}}{L_{e_{n-1}}} = 1 - e_n .$$

Но так как коэффициент очистки фильтрующего слоя один и тоже, т. е. $e_1=e_2=e_3 \ldots = e_n = e$, то можно написать :

$$L_{e_1} = eL_i,$$

$$L_{e_2} = eL_{e_1} = e^2 L_i,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$L_{e_n} = eL_{e_{n-1}} = e^n L_i,$$

Следовательно :

$$e = \left(\frac{L_{e_n}}{L_i}\right)^{1/n}. \tag{5}$$

Органическая нагрузка будучи величиной постоянной, ее можно выразить следующим образом :

$$I_0 = \frac{QL_i}{V_1} = \frac{QL_{e_1}}{V_2} = \cdots = \text{const.}, \tag{6}$$

где $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ представляют собой объемы фильтрующего материала, необходимые дла каждой ступени.

Технологическая схема, показанная на рис. 4, применима к сильно загрязненными сточным водам, когда рециркуляция является обязательной.

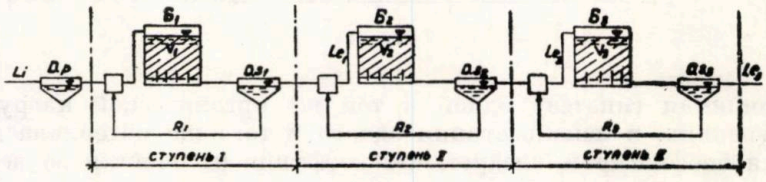


Рис. 4

Выражение для органической нагрузки, имея в воду и дебит рециркуляции, будет иметь следующую форму :

$$I_0 = \frac{QL_i + RL_e}{V}. \tag{7}$$

При помощи этого выражения, можно вывести расчетное выражение для дебита рециркуляции:

$$\frac{R}{Q} = \frac{I_0\left(\frac{V}{Q}\right) - L_i}{L_e}. \tag{8}$$

3. *Критерии технико-экономического расчета*

Проектирование биофильтров требует технико-экономических расчетов для нахождения наилучшего решения из всех анализированных вариантов. Можно рассматривать варианты с различными материалами для наполнения, или с одним и так же напольнительным материалом во всех биологических ступенях.

Экономическими критериями для оправдывания выбора определенного варианта являются:

а) наименьшие расходы на капиталовложение (когда в прочих вариантах эксплуатационные расходы приблизительно равны);

б) наименьшие годовые расходы (в случае двух вариантов с приблизительно равными расходами на капиталовложение);

в) наименьшие общие расходы (в случае когда из двух вариантов, один предполагает больше расходы на капиталовложение, зато меньше годовые расходы).

Технико-экономический расчет, принимаемый при установлении наивыгоднейшего числа биологических ступеней (в случае применения биофильтров), можно проводить на основе расходов на капиталовложение в случае, когда очистка проводится без рециркуляции, в случае применения рециркуляции, нужно исходить из наименьших общих расходов, так как в этом случае прибавляются расходы на эксплуатацию рециркуляционных станций.

4. *Предлагаемый метод для нахождение наивыгоднейшего числа биологических ступеней при их серийном (последовательном) расположении*

4.1. *Без рециркуляции*

Принимаем функциональную схему, показанную на рис. 3. Она составляет из некоторого числа биологических ступеней, расположенных последовательно, причем каждая ступень образована из биофильтра с изменяемым обьемом и соответсвующего вторичного отстойника.

Расходы накапиталовложения находятся в линейной зависимости от обьема фильтра и имеют следующее выражение:

$$I = vV + A, \tag{9}$$

где: v — единичная стоимость наполнения и сооружения биофильтра, V — общии объем биофильтра ($V = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$), A — постоянная стоймость, относящаяся к существованию одной дополнительной ступени.

В случае очистительной станции, состоящей из биологических ступеней, исходя из уравнения (6), можно выразить стоймость капиталовложения следующим образом:

$$I_n = v\left(\frac{QL_i}{I_0} + \frac{Qe\,L_i}{I_0} + \frac{Qe^2\,L_i}{I_0} + \cdots + \frac{Qe^n L_i}{I_0}\right) + nA.$$

Для упрошения, введем обозначение $e^n = \mu$. Тогда получим:

$$I_n = v\left[\frac{QL_i}{I_0}\left(\frac{1-\mu}{1-\sqrt[n]{\mu}}\right)\right] + nA. \tag{9a}$$

В случае очистительной станции, состоящей из $n+1$ биологических ступеней, стоймость капиталовложения дается выражением:

$$I_{n+1} = v\left[\frac{QL_i}{I_0}\left(\frac{1-\mu}{1-\sqrt[n+1]{\mu}}\right)\right] + (n+1)A. \tag{9b}$$

Вследствие возрастания числа биологических единиц, стоимость капиталовложения возрастет на величину:

$$\Delta I = I_{n+1} - I_n. \tag{10}$$

Увеличением ступеней очистки стреталовложения, а это означает, что правый член уравнения (10) имеет отрицательное значение, т.е. $I_{n+1} < I_n$, это возможно только при определенном значении n. Значение n, удовлетворяющее вышеуказанное неравенство, будет представлять собой наивыгоднейшее число ступеней биологической очистки, которое в пределе должно удовлетворять условие:

$$\frac{A}{vQL_i(1-\mu)} \leqslant \left[\frac{1}{(1-\sqrt[n]{\mu})I_0} - \frac{1}{(1-\sqrt[n+1]{\mu})I_0}\right]. \tag{11}$$

4.2. *С рециркуляцией*

Из рассмотрения рис. 4 видно, что каждая биологическая единица характеризуется определенными значениями фильтруемого объема и рециркуляционных дебитов; выражение, дающее зависимость общих расходов от этих переменных, будет иметь следующую форму:

$$K_i = vV + rR + A, \tag{12}$$

где: K_i — объем капиталовложений и эксплуатационных расходов на расчетный период времени, r — единичная стоймость рециркуляции, включающая все расходы на энергию, насосы, вторичные отстойники, распределительные установки и.т.д., R — дебит рециркуляции, v, V, A — обозначают те в выражении (9).

С учетом выражения (8) для дебита рециркуляции, можно написать выражение (12) в другой форме:

$$K_i = vV + r\left(\frac{I_0 V - QL_i}{L_e}\right) + A. \tag{12 a}$$

Определение фильтруемого объема делается с учетом необходимой степени очистки, исходя из уравнения (4), которое может быть написано в виде функции :

$$f(I_0, V) = I_0(1 - e) - \frac{Q}{V}(L_i - L_e). \tag{13}$$

Для определения наименьших общих расходов, нужно высчитать минимум функции (12 *a*), написанной в следующей форме :

$$F(I_0, V) = vV + r\left(\frac{I_0V - QL_i}{L_e}\right) + A. \tag{14}$$

С условием удовлетворения уравнения (13).

Минимум функции (14) может быть легко рассчитан с помощью множителя Лагранжа. Расчет сводится к определению минимума выражения $F(I_0, V) + \lambda f(I_0, V)$. Решая уравнения, вытекающие из $\mathrm{d}F + \lambda \mathrm{d}f \equiv 0$, получаем выражение для объема биофильтра :

$$\frac{V}{Q} = \frac{v(L_i - L_e)/L_i}{(1 - e - I_0\,\mathrm{d}e/\mathrm{d}I_0)(vI_0/L_e + r)}. \tag{15}$$

Для определение органической нагрузки I_0 каждой биологической ступени, нужно подставить в уравнении (13) фильтруемый объем, получаемый из уравнения (15). Получаем :

$$\frac{v}{rI_0} = \frac{1 - e - I_0\,\mathrm{d}e/\mathrm{d}I_0}{I_0^2\,\mathrm{d}e/\mathrm{d}I_0}. \tag{16}$$

Легко заметить, что определение I_0 основывается на исходных, известных элементах правой части уравнения.

Аналитическим путем, решение ведется следующим образом : после того как было получено значение v при помощи выражения (16), определяются объем V биофильтров с помощью уравнения (15) и дебит рециркуляции R с помощью выражения (8) ; этот расчет имеет своей целью получение наибольшей эффективности при минимальной себестоимости.

Для облегчения расчетов, построены графики, показанные на рис. 5. Эти графики основанны на выражении (16) и составлены как для классического заполнительного материала (пунктирная линия), так и для пластмассового заполнителя (непрерывная линия). Выражения для коэффициентов фильтрации этих заполнителей были наидены экспериментально разными исследователями, на основании исследования моделей [2].

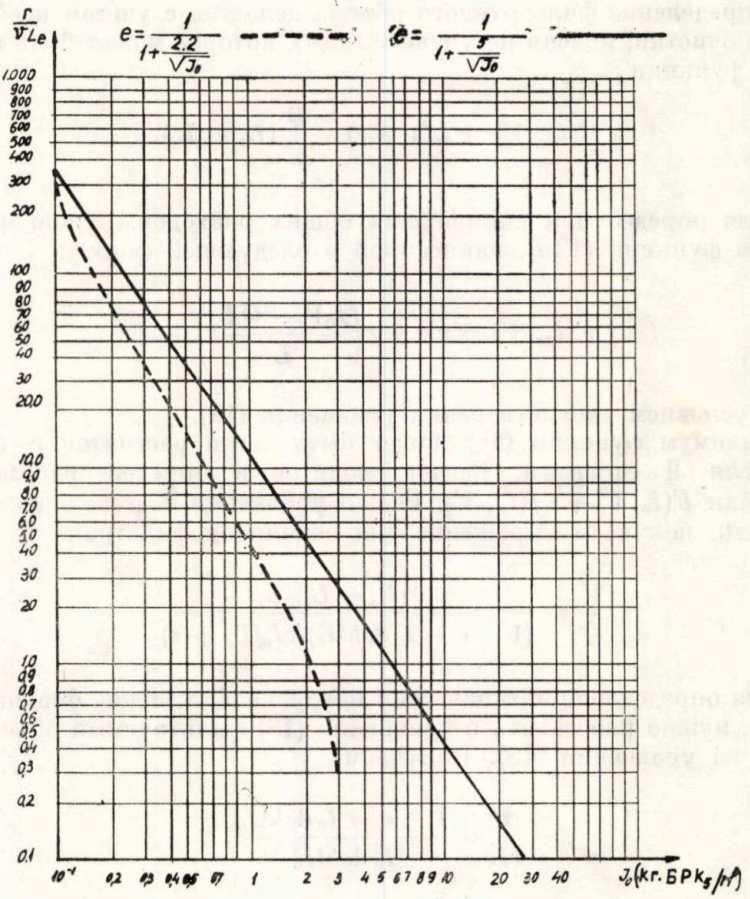


Рис. 5

Примеры расчета

1° Биологические ступени очистки без рециркуяции:

$Q = 2\,000$ м³/день, $L_i = 800$ мг/л, $L_e = 80$ мг/л;

I_0 макс $= 3$ кг БПК$_5$/м³; заполнитель: щебень с коэффицентом очистки $e = \frac{1}{1 + 2{,}26/\sqrt{I_0}}$; цены (ориентировочные): $v = 500$ лей/м³, $A = 1\,000\,000$ лей, $D_s = 250\,000$ лей.

На основании выражении (5) и (6), а также соответствующей кривой на рис. 5, получается:

а) для случая $n = 1$, $I_0 = 0{,}0625$ кг БРК$_5$/м^3, $V = 12{,}8\,Q$;

б) для случая $n = 2$, $I_0 = 1{,}10$ кг БРК$_5$/м^3, $V_1 = 0{,}728\,Q$, $V_2 = 0{,}230\,Q$;

в) для случая $n = 3$, $I_0 = 3{,}81$ кг БРК$_5$/м^2, $V_1 = 0{,}211\,Q$, $V_2 = 0{,}091\,Q$, $V_3 = 0{,}045\,Q$

Из расчетов по определению стоимости следует, чуо очистительная станция, состоящая из трех ступеней очистки; предлогаем наименшее капиталовложение, но не может быть принята, так как не удовлетворяет условиям уравнения (11), а органическая нагрузка больше максимальной. Следовательно, оптимальным решением нледует считать $n = 2$.

2° Биологические ступени с рециркуляцией

$Q = 50\,000$ м^3/день, $L_i = 2\,800$ мг/л, $L_e = 100$ мг/л.

Фильтрующий заполнитель, случай *а* — щебень с характеристиками:

$$e = \frac{1}{1 + 2{,}26/\sqrt{I_0}}, \qquad I_0 \text{ макс} = 3 \text{ кг БРК}_5/\text{м}^3;$$

случай *б* — пластмассовые пластины с характеристиками:

$$e = \frac{1}{1 + 5/\sqrt{I_0}}, \qquad I_0 \text{ макс} = 25 \text{ кг БРК}_5/\text{м}^3.$$

Ориентировочные цены (иредпологалось что пластмассовые пластины примерн в 2,5 раза дороже щебня), в случае *а*:

$v = 500$ лей/м^3, $r = 120$ лей/м^3 день, $D_s = 2\,500\,000$ лей;

в случае *б*:

$v = 1\,100$ лей/м^3, $r = 176$ лей/м^3 день, $D_s = 2\,500\,000$ лей.

Решая уравнения аналитическим или графическим путем и иодставляя соотвествующие значеия, находим, что оптимальное число биологических стуненей с заполнением из щебня равняется 2, при общей стоимости в 47 290 000 лей, а в случае заполнения из пластмассовых пластин $n = 4$, при общей стоимости в 27 650 000 лей.

5. *Выводы*

Для очищения сточных вод, сильно загрязненных органическими промышленными отбросами, необходимо изучать технологическими схемы состоящие из нескольких биологических ступеней, содержащих биофильтры и выбрать те, которые являются наиболее экономичными как с точки зрения капиталовложения, так и с точки зрения эксплуатационных расходов.

Применение пластмассового заполнителя является перспективным решением с экономической точки зрения, помимо этого выгоден и с эксплуатационной точки зрения. Лабораторные изыскания [6] показали

что очистительная способность подобных биофильртов в 1,2...1,5 раза больше очистительной способности биофильтра наполненного щебнем, при всех прочих равных условиях.

Нахождение оптимального числа ступеней биологической очистки, исходя из условий максимальной эффективности и минимальной стоимости, не являются сложным процессом; оно позволяет изучать большое число различных вариантов, в случае больших очистительных станции промышленных вод.

Конечно, вышеуказанный метод может быть улучшен в случае применения электронно-вычислительных машин, которые смогут учитывать полностью все параметры, которые обусловливают комплексные явления биологической очистки.

Поступила 23 октября 1971 г.

Ясский политехнический институт,
Кафедра гидротехнических сооружений

ЛИТЕРАТУРА

1. * * * *Rapport sur la première session de l'organ E/ECE.* Nations Unies Commission Économique pour l'Europe, Water, *5*, Geneve (1968).
2. Saint-Paul et Desclos, *Études des systèmes d'épuration des eaux usées par filtre bactérien.* La tehnique de l'eau et de l'assainissement, *271—272* (1969)
3. Chiriac V., *Instalaţii pentru epurarea apelor reziduale.* Comitetul de stat al Apelor, Buc., 1966.
4. Bliţ Em., *Canalizări.* EDP, Buc., 1969.
5. Symons J., Mc. Kinney R., Hassis H. A., *Procedure for Determination of the Biological Treatability of Industrial Waters.* J.W.P.C.F. *8*, (1960).
6. Воронов В. Ю., Кореньков Н. В., *Испытания полупроизводственной установки биофильтра с пластмассовой загрузкой.* Водоснабжение и санитарная техника, *7* (1968).
7. Manea Gh., *Stadiul actual al rezolvării problemei apelor uzate de la unităţile industriei laptelui.* Hidrotehnica, *10* (1969).
8. Negulescu M., *Epurarea apelor uzate industriale.* Ed. Tehn., Buc., 1968.

CONSIDERAŢII CU PRIVIRE LA PROIECTAREA OPTIMĂ A TREPTEI BIOLOGICE LA STAŢII DE EPURARE

(Rezumat)

Pe baza proceselor cunoscute ale epurării biologice ce au loc în biofiltre, se studiază posibilitatea elaborării unei metode rapide de stabilire a numărului optim de trepte biologice care să satisfacă condiţia de eficienţă maximă la un preţ de cost minim.

Metoda este aplicabilă în special la proiectarea staţiilor de epurare ale întreprinderilor industriale ce evacuează reziduuri cu mari concentraţii organice.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1—2, 1972
Secția V
CONSTRUCȚII, ARHITECTURĂ

D. K. 624.2; 625.1

BEITRAG ZUR WIRTSCHAFTLICHEN HYDRAULISCHEN BEMESSUNG VON PLATTENBELEGTE FUSSBRÜCKEN MIT FREIEM ABFLUSS

VON

VICTOR ZAVATI und OLIMPIA BLĂGOI

1. Beim Überqueren der Täler und Flüsse, die meist begegneten Kunstbauten, derer Aufgabe die Sicherung des Wasserabflusses unter Eisenbahn- oder Verkehrswege ist, sind die kleinen Brücken und die Röhrenbrücken verschiedener Art. Diese machen durchschnittlich 65% von der Gesamtlänge der Durchgänge aus, was einen hohen Preis des betreffenden Verbindungsweges herbeiführt, gegen die anderen, denselben Zweck derüllende Bauwerke, die grossen und die mittleren Brücken. Daher ist beim Entwurf ifeser Art Ingenieurbauwerke die sorgfältigste Erwägung nötig.

Bekanntlich findet der Wasserabfluss durch plattenbelegte Fussbrücken mit freier Höhe, in analogen Bedingungen statt, mit denen die man bei breiten Überfallschwellen begegnet, wobei die Schwellenhöhe gleich Null ist.

Die freie Stromoberfläche unter der Fussbrücke nimmt verschiedene von den in der Stromlänge begegneten Widerstände, der Konstruktionslänge und der abwärts Wassertiefe, abhängige Formen an.

2. Das Schema des Stromabflusses unter der Fussbrücke wird durch vergleichen der Abwärtstiefe h_a mit der Zugeordneten der Schrumpfschnitt-Tiefe h_c'' bestimmt.

Man kann zwei Fälle unterscheiden:

Fall I: $h_a < h_c'' = (1, 2...1,4)\, h_{cr}$ — die Fussbrücke wird als eine freie breite Überfallschwelle arbeiten (Fussbrücke mit freiem Abfluss).

In diesem Falle tretten zwei Situationen auf:

a) $h_{cr} \geq h_a$ — Remuu-Verbindung (Abb. 1), in der Rechenarbeit nimmt man an dass die Endtiefe im Mittelbereich des Flussbettes, unter der Fussbrücke (h), der kritischen Tiefe gleich ist ($h = h_{cr}$).

b) $h_{cr} < h_a$ — die Verbindung wird mittels hydraulischem Satz hergestellt (Abb. 2), und die Tiefe des Stromes unter der Fussbrücke (h) wird als gleich mit der vorhandenen Tiefe abwärts des Bauwesens angesehen ($h = h_a$).

Fall II: $h_a > (1,2...1,4)\, h_{cr}$. **Die Fussbrücke wird den Schrumpfschnitt des Stromes an dem Ertränkunseingang haben; es tritt ein Ertränkungssatz auf und die Tiefe des**

Stromes beim Ausgang von unter der Fussbrücke ist mit der vorhandenen Tiefe abwärts des Bauwerkes gleich ($h=h_a$). Der Wasserabfluss unter der Fussbrücke wird von der Tiefe stromabwärts beeinflust.

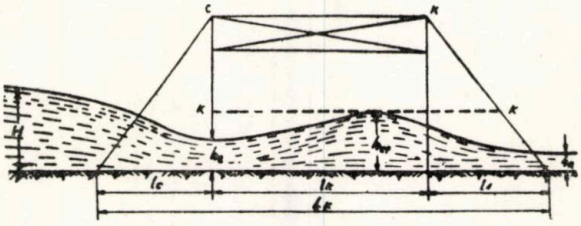


Abb. 1. — Remuu-Verbindung.

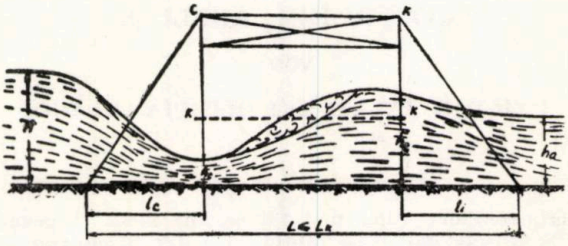


Abb. 2. — Verbindung mit hydraulischem Satz.

Die hydraulische Berechnung der Fussbrücken gründet auf der hydraulischen Berechnung der breiten Überfallschwellen, wenn man lediglich den Seitenschrumpf des Stromes und die Hypotese der prismatischen Flussbete mit nur von der Tiefe abhängiger Abflussquerschnit-Oberfläche betrachtet.

Da in der vorhandenen Fachliteratur, das Problem der plattenbelegten Fussbrücken mit Trapezquerschnitt, für Fall I des Stromabflusses unter der Fussbrücke, ungenügend behandelt wird, ist es nun die Aufgabe des Verfassers es zu lösen.

3. Die Berechnung des Absatzgebietes der plattenbelegten Fussbrücken setzt voraus dass die Längsneigung des Flussbettes unter der Fussbrücke, mit der kritischen Neigung gleich ist, nach der weiter angeführten Schema.

Mit den Anfangsangaben über: Q — Wassermenge, Flussbettquerschnitt, n — Rauhigkeitskoeffizient, i — Längsneigung des Flussbettes und die zulässige Fliessgeschwindigkeit des Wassers unter dem Bauwerk in Abhängigkeit von der Gelände- oder Verkleidungsart, wird festgestellt:

1° Lichtraum der Fussbrücke

$$B_{cr} = \frac{gQ}{\alpha \varepsilon v_{ad}^3}.$$

2° Kritische Tiefe $h_{cr} = \begin{cases} \dfrac{\alpha v_{ad}^2}{g}, & \text{für Rechteckschnitte,} \\ \dfrac{B_{cr} - \sqrt{B_{cr}^2 - 4m\omega_{cr}}}{2m}, & \text{für Trapezschnitte.} \end{cases}$

3° Lichtraum der Fussbrücken, für Typenskizzen-Einsatz.

4° Die dem Typenskizzen-Lichtraum entsprechende Geschwindigkeit

$$v = \sqrt[3]{\frac{gQ}{\alpha \varepsilon B_{tip}}}.$$

5° Flussbettneigung unter der Fussbrücke.

6° Wassertiefe aufwärts von der Fussbrücke

$$H = h + \frac{\alpha v^2}{2g\varphi^2} - \frac{\alpha v_0^2}{2g}.$$

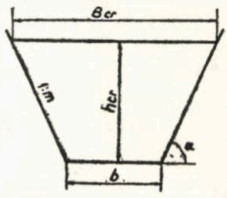


Abb. 3. — Querschnitt.

4. Von den soeben berichteten Erkentnissen ist es ersichtlich dass sowohl beim Schema des Wasserabflusses unter der Fussbrücke sowie bei der Bestimmung der Rechenelemente des Absatzgebietes, tritt die kritische Tiefe des Wasserstromes unter dem Bauwerk (h_{cr}) auf.

Im Falle der Fussbrücken mit Trapezschnitt, wird die kritische Tiefe mittels der Oberflächengleichung des Abflussquerschnittes bestimmt:

(1) $$\omega_{cr} = (B_{cr} - mh_{cr})\, h_{cr},$$

abhängig von h_{cr} gelöst:

(2) $$h_{cr} = \frac{B_{cr} - \sqrt{B_{cr}^2 - 4m\omega_{cr}}}{2m},$$

worin: B_{cr} — Strombreite unter der Fussbrücke für h_{cr}, ω_{cr} — Oberfläche des Abflussquerschnittes, m — Böschungskoeffizient.

Da es zur Zeit kein bestimmtes Bedingungsverhältnis zwischen den Parametern: Wassermenge (Q), Geschwindigkeit (v_{ad}) und Böschungskoeffizient (m) in der hydraulischen Berechnung der Fussbrücken mit Trapezschnitt vorhanden ist, wird in der hydraulischen Berechnungspraxis der Fussbrücken mit Trapezschnitt, von dem Entwerfer ein beliebieger Wert für den Böschungskoeffizienten gewählt. Das Verfahren führt zu Situationen, wenn der Ausdruck $\sqrt{B_{cr}^2 - 4m\omega_{cr}}$ imaginär wird; h_{cr} kann daher nicht errechnet werden. Man erhält die Lösung des Problems durch Versuche, die aber zu umständlichen Rechnungen führen. Um eine durchgreifende Lösung zu finden, und um die Bedingungen wohlerwogener Feststellung, der Trapezquerschnitte, vom wirtschaftlichen Standpunkt aus zu schaffen, wollen wir die Abhängigkeit zwischen Böschungs-

koeffizient (m) und die anderen zwei Parameter — Wassermenge und Geschwindigkeit, bestimmen; dadurch sind die Anfangsbeziehungen für den Fussbrückenentwurf geschaffen.

Dazu muss man folgendermassen verfahren:

Es besteht die Bedingung dass das Gleichung II. Grades in Abhängigkeit von h_{cr}, reele Wurzeln haben soll, d. h. soll der Deskriminator positiv sein ($\Delta \geqslant 0$). Also

$$B_{cr}^2 - 4m\omega_{cr} \geqslant 0. \tag{3}$$

Wie bekanntlich ist

$$\omega_{cr} = \frac{Q}{\varepsilon v_{cr}}. \tag{4}$$

Aus dem F r o u d e - Verhältnis:

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{\varepsilon^2 \omega_{cr}^3}{B_{cr}} \tag{5}$$

erzielt man:

$$B_{cr} = \frac{g\varepsilon^2 \omega_{cr}^3}{\alpha Q^2}. \tag{6}$$

Setzt man (6) in Gleichung (3) ein, erhalten wir die Bedingung

$$\frac{g\varepsilon^2 \omega_{cr}^3}{\alpha Q^2} - 4m\omega_{cr} \geqslant 0, \tag{7}$$

d. h.

$$m \leqslant \frac{g^2 Q}{4\varepsilon\alpha^2 v_{cr}^5}. \tag{8}$$

Für die kritische Geschwindigkeit besteht ein von der Geländeoder Verkleidungsart des Flussbettes in der Fussbrückenrichtung abhängiger zulässiger Wert. In unserem Lande sind in STAS 3 051-61, die Werte der zulässigen Geschwindigkeit, zwischen 1...5 m/s angegeben.

Der Ausdruck (8) wird daher

$$m \leqslant \frac{g^2 Q}{4\varepsilon\alpha^2 v_{ad}^5}. \tag{9}$$

Aus diesem Ausdruck ist ersichtlich dass der Böschungskoeffizient (m) von der Wassermenge, der Geschwindigkeit und dem Seitenschrumpfkoeffizient abhängig ist.

Durch Einsatz des Böschungskoeffizient Ausdruckes, hat man die von ihm für zulässige Geschwindigkeiten angenommene Werte, laut STAS

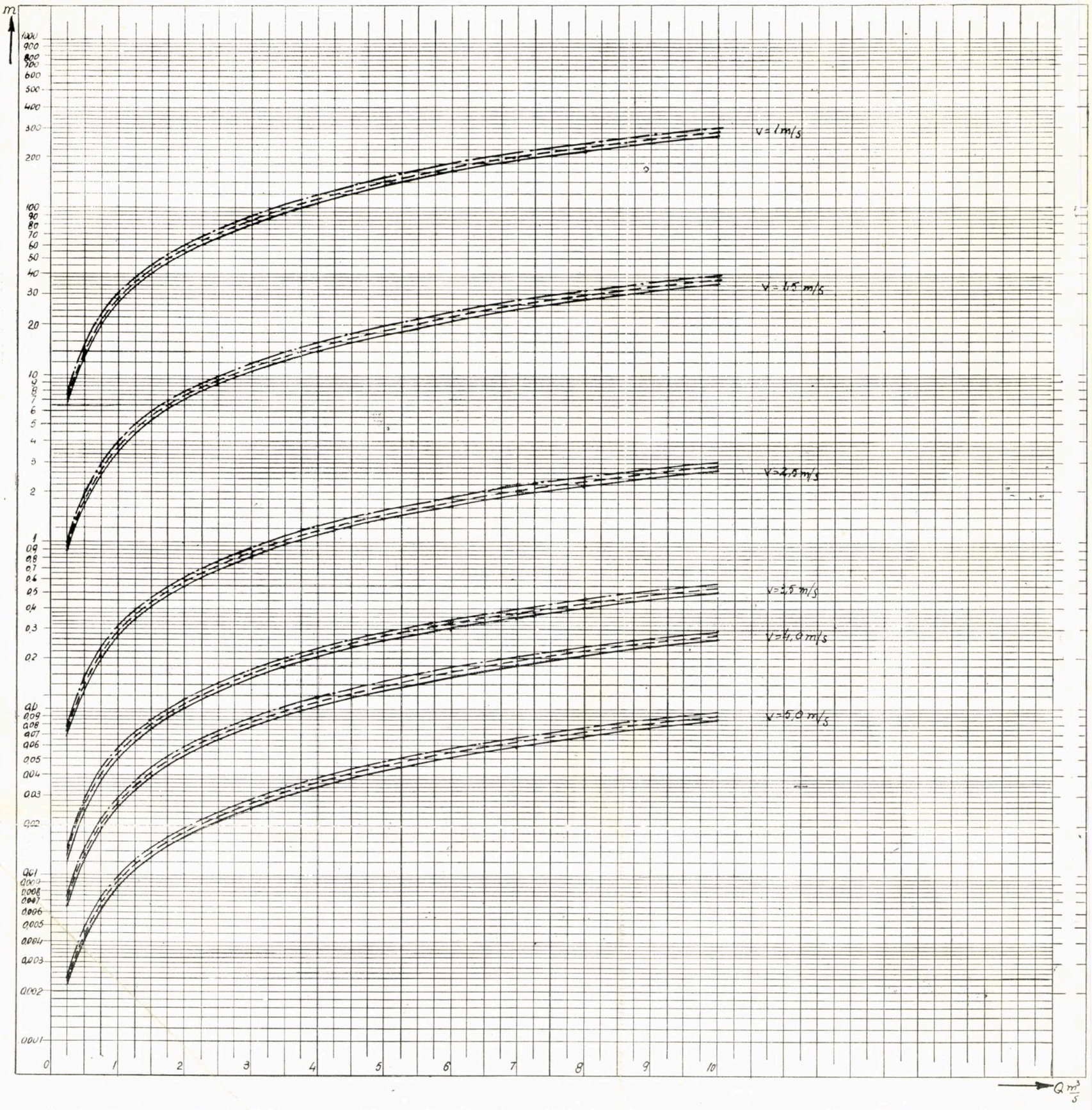


Abb. 4. — Diagramme für die Bestimmung des Böschungskoeffizienten in Abhängigkeit von der Wassermenge und der zulässigen Geschwindigkeit.

Tafel 1

Berechnung des Böschungskoeffizienten in Abhängigkeit von der Wassermenge und der zulässigen Geschwindigkeit

$\varepsilon = 0{,}9$			$\varepsilon = 0{,}85$			$\varepsilon = 0{,}8$		
v_a	$m = \frac{g^2Q}{4\varepsilon\alpha^2 v_a^5}$		v_a	$m = \frac{g^2Q}{4\varepsilon\alpha^2 v_a^5}$		v_a	$m = \frac{g^2Q}{4\varepsilon\alpha^2 v_a^5}$	
1	$m = \frac{9.81^2Q}{40.91^2.1^5} = 26{,}732Q$		1	$m = \frac{9.81^2Q}{40.85.1^2.1^5} = 28{,}3045Q$		1	$m = \frac{9{,}81^2Q}{40{,}8.1^2.1^5} = 30{,}013Q$	
	$Q=1$	26,732; $Q=$ 6 160,392		28,3045	169,827		30,073	180,433
	$Q=2$	53,464; $Q=$ 7 187,124		56,600	198,1315		60,146	210,511
	$Q=3$	80,196; $Q=$ 8 213,856		84,9135	226,436		90,219	240,584
	$Q=4$	105,228; $Q=$ 9 240,588		113,218	264,7465		120,292	270,657
	$Q=5$	133,660; $Q=$ 10 267,320		141,5225	283,045		150,365	300,730
1,5	$m = \frac{9.81^2Q}{40{,}9.1^2.1{,}5^5} = 3{,}521Q$		1,5	$m = \frac{9{,}81^2Q}{40{,}85.1^2.1^5} = 3{,}701Q$		1,5	$m = \frac{9{,}81^2Q}{40{,}8.1^2.1{,}5^5} = 3{,}9588Q$	
	3,521	21,126		3,701	22,206		3,9588	23,7528
	7,042	24,647		7,402	25,907		7,9176	21,7116
	10,563	28,168		11,103	29,608		11,8764	31,6704
	14,084	31,689		14,804	33,309		15,8352	35,6492
	17,605	35,210		18,505	37,01		19,794	39,588
2,5	$m = \frac{9.81^2Q}{40{,}9.1^2.2{,}5^5} = 0{,}2737Q$		2,5	$m = \frac{9{,}81^2Q}{40{,}85.1^2.2{,}5^5} = 0{,}2898Q$		2,5	$m = \frac{9{,}81^2Q}{40{,}8.1^2.2{,}5^5} = 0{,}3078Q$	
	0,2737	1,6422		0,2898	1,7388		0,3078	1,8454
	0,5474	1,9159		0,5796	2,0286		0,6156	2,1546
	0,8211	2,1896		0,8694	2,3184		0,9234	2,4684
	1,0948	2,6433		1,1592	2,6082		1,2312	2,7702
	1,3685	2,737		1,4490	2,898		1,539	3,078
3,5	$m = \frac{9{,}81^2Q}{40{,}9.1^2.3{,}5^5} = 0{,}0509Q$		3,5	$m = \frac{9{,}81^2Q}{40{,}85.1^2.3{,}5^5} = 0{,}0538Q$		3,5	$m = \frac{9{,}81^2Q}{40{,}8.1^2.3{,}5^5} = 0{,}05727Q$	
	0,0509	0,3054		0,0538	0,3228		0,05727	0,34362
	0,1018	0,3563		0,1076	0,3766		0,11454	0,40119
	0,1527	0,4072		0,1614	0,4304		0,17181	0,45816
	0,2036	0,4681		0,2152	0,4842		0,22968	0,51543
	0,2545	0,509		0,269	0,538		0,28635	0,5727
4	$m = \frac{9{,}81^2Q}{40{,}9.1^2.4^5} = 0{,}0261\,Q$		4	$m = \frac{9{,}81^2Q}{40{,}85.1^2.4^5} = 0{,}02764Q$		4	$m = \frac{9{,}81^2Q}{40{,}8.1^2.4^5} = 0{,}02936\,Q$	
	0,0261	0,1566		0,02764	0,16684		0,02936	0,17616
	0,0522	0,1827		0,05528	0,19348		0,05872	0,20552
	0,0783	0,2085		0,08292	0,22112		0,08808	0,23688
	0,1044	0,2349		0,11056	0,24876		0,11744	0,26334
	0,1305	0,261		0,1362	0,2764		0,1468	0,2936
5	$m = \frac{9.81^2Q}{40{,}9.1^2.5^5} = 0{,}00855Q$		5	$m = \frac{9{,}81^2Q}{40{,}85.1^2.5^5} = 0{,}009057Q$		5	$m = \frac{9{,}81^2Q}{40{,}8.1^2.5^5} = 0{,}00959Q$	
	0,00855	0,0513		0,009057	0,054342		0,00959	0,05754
	0,0171	0,05985		0,018114	0,063399		0,01918	0,06713
	0,02565	0,0684		0,027171	0,072458		0,02877	0,07672
	0,0342	0,07695		0,036228	0,081513		0,03836	0,08631
	0,04275	0,0855		0,045285	0,09057		0,04795	0,0959

3 051-61, für verschiedene Wassermengen (1...10 m^3/s) und für die drei Arten von Verbindungskonstruktionen, Widerlager-Dämmen errechnet.

5. Die ermittelten Ergebnisse sind in beigefügter Tafel 1 zusammengestellt. Es wurden ebenfalls drei Variationsdiagramme des Böschungskoeffizienten (m), in Abhängigkeit von der Wassermenge (Q) und der zulässigen Geschwindigkeit (v_{ad}), errichtet; je ein Diagramm für jeden Wert den der Seitenschrumpf-Koeffizient annimmt ($\varepsilon = 0{,}9$; 0,85; 0,80).

Die Diagramme sind im Abb. 4 dargestellt. Sie ermöglichen die unmittelbare Beurteilung der Böschungskoeffizientengrösse für die zwischen 1...10 m^3/s schwankenden Wassermengen und verschiedene zulässige Gescchwindigkeiten.

Die Anwendung dieser Art Diagramme ermöglicht eine wirtschaftliche Projektierung der plattenbelegten Fussbrücken mit freiem Abfluss und Trapezschnitt. Gleichzeitig kann man den Studium einzelner Varianten aufnehmen betreffs der Verkleidungsart des Strombettes unter der Fussbrücke, in Abhängigkeit von den Verwendungsmöglichkeiten der örtlichen Baustoffquellen.

Eingegangen am 16. September 1971

Technische Hochschule, Jassy,
Lehrstuhl für Hydrotechnische
Konstruktionen

LITERATURVERZEICHNIS

1. Ursescu Gh., Macarevici L., *Calculul hidraulic al podeţelor*, Iaşi, 1956.
2. * * * STAS 3 051—61.

CONTRIBUŢII LA DIMENSIONAREA HIDRAULICĂ ECONOMICĂ A PODEŢELOR DALATE CU SCURGERE LIBERĂ

(Rezumat)

Plecînd de la analiza factorilor care se iau în consideraţie în calculul debuşeelor podeţelor dalate cu scurgere liberă, avînd secţiunea transversală trapezoidală, s-a stabilit relaţia de dependenţă între coeficientul de taluz (m) şi ceilalţi doi parametri — debitul (Q) şi viteza admisibilă (v_{ad}) — care reprezintă condiţiile iniţiale pentru proiectarea podeţelor.

Rezultatele obţinute prin folosirea relaţiei stabilite au permis întocmirea a trei diagrame de variaţie a coeficientului de taluz funcţie de debit (Q = 1...10 m^3/s), viteza admisibilă (conform STAS 3 051-61) şi valoarea coeficientului de contracţie laterală ($\varepsilon = 0{,}9$; 0,85; 0,80).

Diagramele permit un calcul expeditiv al coeficientului de taluz funcţie de ceilalţi parametri ce se impun, uşurînd astfel munca proiectanţilor în dimensionarea hidraulică optimă a podeţelor dalate cu secţiunea transversală trapezoidală.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1—2, 1972
Secția V
CONSTRUCȚII, ARHITECTURĂ

C.Z. 691.324

CONSIDERAȚII ASUPRA PRIZEI, ÎNTĂRIRII ȘI ÎNTĂRIRII HIDROTERMICE A CIMENTURILOR AMESTECATE CU CALCAR ȘI CENUȘĂ DE PIRITĂ *)

DE

I. C. BURLACU

1. Introducere

Pe lîngă cimenturile portland amestecate cu zgură de furnal, s-au experimentat și alte adaosuri active, care au dat rezultate foarte bune cu varul gras încă din antichitate. S-au realizat cimenturi cu adaosuri hidraulice și apoi cimenturile cu trei componenți.

G. Haegermann a obținut în anul 1925 un brevet german pentru următoarele grupe de cimenturi amestecate: a) clincher aluminos, zgură bazică de furnal și zgură acidă de furnal, b) clincher aluminos, zgură de furnal și adaosuri hidraulice silicioase, c) clincher aluminos, clincher portland și zgură acidă de furnal.

Din studiul cimenturilor cu trei componenți a rezultat că atunci cînd clincherul de ciment portland se macină cu două adaosuri hidraulice diferite sau cu același adaos hidraulic tratat termic diferit, se obțin cimenturi amestecate de calitate mai bună decît în cazul cînd clincherul se macină cu fiecare adaos în parte.

Comportarea amestecului de ciment portland, ciment aluminos și zgură acidă de furnal poate fi interpretată astfel. Amestecul celor două cimenturi face întotdeauna priza rapidă; aceeași priză rapidă se întîlnește și la amestecarea cimentului aluminos cu var. Rezultă că hidroxidul de calciu fie din varul gras fie cel pus în libertate prin hidratarea și hidroliza cimentului portland produce accelerarea prizei. Dacă la amestecul celor două cimenturi se adaugă o cantitate mai mare de zgură acidă de furnal, aceasta leagă chimic hidroxidul de calciu, reduce concentrația acestuia în faza apoasă deci și acțiunea sa acceleratoare asupra prizei.

F. Ferrari a obținut în anul 1931 un brevet italian pentru un ciment amestecat format din clincher portland măcinat cu o mare cantitate de pouzzolană sau de zgură bazică și granulată și cu un adaos de ghips pînă la 8% din totalul amestecului.

R. Grün a studiat în 1936 un ciment amestecat format din ciment portland 25%, tras 10%, zgură de furnal 62%, ghips 3%, cu rezultate atît de bune încît l-a numit ciment ideal.

În anii următori cercetători din diferite țări au descoperit și au brevetat pentru a doua oară lianți amestecați.

---

*) Prezentată la sesiunea științifică a Institutului politehnic din Iași, 2—4 iulie 1970.

2. Mecanismul reacțiilor chimice caracteristice

Principalele reacții chimice care au loc în timpul prizei și întăririi în sistemul ciment—calcar—cenușă de pirită, capabile să explice și continuarea creșterii rezistențelor mecanice în timp, în special la procentele mari și în cazul tratamentelor hidrotermice, trebuie să fie următoarele :

1° Calcarul ar intra în reacție după un proces ciclic, gen catalitic, consumîndu-se treptat în timp, dînd naștere hidroxidului de calciu, prin intermediul hidrogenului sulfurat rezultat din sulfurile hidrolizabile existente în cenușa de pirită, proces activat inițial și de căldura de hidratare a cimentului după variantele :

a) Din sulfura de calciu existentă inițial în cenușă sau rezultată din complexul de reacții ce au loc în primele zile de întărire a cimentului s-ar iniția procesul ciclului. După cum se știe, sulfura de calciu, în mod obișnuit, hidrolizează pînă la sulfhidratul de calciu, dar la fierbere are loc hidroliza totală cu degajare de hidrogen sulfurat [2]. Presupunînd că prin fierbere se accelerează această hidroliză totală, rezultă că în anumite condiții poate fi obținută în timp îndelungat, iar în cazul tratamentelor hidrotermice, mult mai rapid. Ca atare poate avea loc pe lîngă hidroliza parțială, care se desfășoară după reacția :

$$2\,CaS + 2\,HOH \rightarrow Ca(SH)_2 + Ca(OH)_2,$$

și hidroliza totală conform ecuației :

$$CaS + 2\,HOH \rightarrow Ca(OH)_2 + H_2S.$$

Obținerea inițială a hidrogenului sulfurat din această reacție sau din altele este de mare importanță, întrucît el este inițiatorul important al procesului ciclic, deci catalizatorul, intrînd și ieșind din reacție după cum urmează :

$$CaS + 2\,HOH = Ca(OH)_2 + H_2S, \quad H_2S + CaCO_3 = CaS + H_2CO_3$$

și din nou

$$CaS + 2\,HOH = Ca(OH)_2 + H_2S, \; H_2S + CaCO_3 = CaS + H_2CO_3 \text{ etc.}$$

Reacția de hidroliză totală, pentru simplificare, a fost dată direct dar ea poate fi reprezentată și pe faze după cum urmează :

$$2\,CaS + 2\,HOH = Ca(SH)_2 + Ca(OH)_2,$$

$$Ca(SH)_2 + 2\,CaS + 6\,HOH = 3\,Ca(OH)_2 + 4\,H_2S.$$

Însumînd aceste două ecuații se obține $4CaS + 8HOH = 4Ca(OH)_2 + 4H_2S$ și simplificînd rezultă reacția totală ce a fost introdusă direct în procesul ciclic :

$$CaS + 2\,HOH = Ca(OH)_2 + H_2S.$$

Hidrogenul sulfurat poate fi reținut în sistem și de alți componenți ai cenușii de pirită, care reacționează mai rapid, cum ar fi oxizii de aluminiu, și redat prin hidroliză reacției cu calcarul.

b) De asemenea calcarul ar mai prezenta o sursă de hidroxid de calciu, după alt proces ciclic asemănător, dar foarte lent, în care n-ar mai fi necesară hidroliza totală și în care inițiatorul catalitic ar fi sulfhidratul de calciu, după cum urmează:

$$2\,CaS + 2\,HOH = Ca(SH)_2 + Ca(OH)_2, \quad Ca(SH)_2 + CaCO_3 = 2\,SCa + H_2CO_3$$

și din nou

$$2\,CaS + 2\,HOH = Ca(SH)_2 + Ca(OH)_2,$$

$$Ca(SH)_2 + CaCO_3 = 2\,SCa + H_2CO_3 \text{ etc.}$$

Rezultarea din aceste mecanisme de reacție a acidului carbonic este utilă, căci acesta formează cu calcarul bicarbonatul de calciu, care fiind solubil reacționează mult mai ușor cu catalizatorul. În acest mod calcarul adăugat cu cenușa de pirită la ciment este o sursă treptată de hidroxid de calciu, mult mai rapidă în cazul tratamentelor hidrotermice. Hidroxidul de calciu astfel obținut contribuie la desăvîrșirea reacțiilor de întărire în acest sistem.

2° Calcarul mai reacționează în acest sistem și cu oxidul de aluminiu provenit din cenușă, după reacția:

$$Al_2O_3 + n\,CaCO_3 + x\,H_2O = Al_2O_3.n\,CaO.x\,H_2O + n\,CO_2.$$

El reacționează de asemenea cu aluminatul tricalcic din ciment, în conformitate cu reacția:

$$3\,CaO.Al_2O_3 + CaCO_3 + n\,H_2O = 3\,CaO.Al_2O_3.CaCO_3.n\,H_2O,$$

conducînd la formarea carbonat aluminatului tricalcic hidratat și a hidroaluminaților de calciu ($3\,CaO.Al_2O_3.n\,H_2O$).

3° Cenușa de pirită, avînd drept componenți principali: $SiO_2 = 12{,}09\%$, $Fe_2O_3 = 62{,}5\%$, $Al_2O_3 = 11{,}23\%$, $CaO = 1{,}53\%$, $Zn = 4{,}22\%$, $S = 5{,}41\%$, $P_2O_5 = 0{,}27\%$ va reacționa după cum urmează. Oxidul feric formează feritul de calciu [2]:

$$Fe_2O_3 + 3\,HOH = 2\,Fe(OH)_3,$$

$$2\,Fe(OH)_3 + Ca(OH)_2 = Fe_2O_3.CaO + 4\,H_2O.$$

Din oxizii de aluminiu se obțin hidroaluminații de calciu, din bioxidul de siliciu se formează hidrosilicați rezultînd și sulfoaluminatul de calciu hidratat, care în cazul cînd se obține în pastă nu mai produce expansiunea cimentului ci contribuie la întărire prin împîslirea cristalelor aciculare ce se formează. Nu s-a insistat asupra reacțiilor chimice ale com-

ponenților mineralogici din cimentul propriu-zis, dar este util de precizat că hidroxidul de calciu, pus în libertate la hidratarea și hidroliza cimentului, poate participa și la reacțiile de mai sus, concomitent cu cel rezultat din mecanismul de reacție studiat la pct. 1°. În mod evident aceste reacții contribuie la întărirea cimentului studiat, unele într-o măsură mai mare iar altele într-o măsură mai mică, diferențiindu-se după mărimea procentului de calcar și cenușă utilizat precum și după raportul lor. Trebuie subliniată importanța mecanismului de reacție studiat la pct. 1°, de punere treptată în libertate din calcar, în timp mai îndelungat, a hidroxidului de calciu, care contribuie la desăvîrșirea procesului de întărire. Existența acestui mecanism este justificată în special de creșterea rezistențelor mecanice ale acestor cimenturi prin tratamentul hidrotermic efectuat după 28 zile de păstrare a epruvetelor în mediu umed, cînd reacțiile chimice și procesul de întărire a cimentului propriu-zis devine mult mai lent, precum și prin creșterea acelorași rezistențe într-un timp mai îndelungat la cimentul care are un conținut de 80% amestec de calcar și cenușă. De asemenea trebuie să se țină seama că prin hidratarea feroaluminatului tetracalcic (celit I) rezultă din cimenturi un hidroaluminat tricalcic și un ferit de calciu, ale cărui rezistențe mecanice cresc încet, în timp îndelungat. Dar și oxidul de aluminiu precum și oxidul feric din cenușă pot forma aproximativ aceiași componenți în urma reacției lor cu hidroxidul de calciu, pus, în timp, în libertate după mecanismul de reacție studiat la pct. 1°. Acest aspect se observă la procentele mari în cenușă și în calcar, la care factorul vitezei de întărire este mare datorită rezistențelor crescute în timp îndelungat, care confirmă existența acestui mecanism prin consumarea unei cantități mari de hidroxid de calciu, pe care nu-l poate lua decît din calcar. De aici rezultă că se poate obține hidroxid de calciu numai prin sulfurarea unei suspensii apoase de calcar, fapt ce se verifică ușor experimental și teoretic.

2. Partea experimentală

În cele ce urmează se prezintă un studiu al prizei, întăririi și întăririi hidrotermice, la cimenturile amestecate, obținute din calcarul compact de la Stînca — Ștefănești, județul Botoșani, și cenușă de pirită obișnuită de la Combinatul Chimic din Valea Călugărească, cu ciment RIM sau cu ciment portland. Atît calcarul cît și cenușa au fost în prealabil măcinate și cernute la o finețe apropiată de cea a cimentului. În procesul prizei calcarul intervine cu o influență de accelerare, pe cînd cenușa imprimă o influență de întîrziere.

S-a presupus inițial existența unui mecanism de reacție între acești componenți, care în timp ar transforma calcarul în hidroxid de calciu, după schema expusă mai sus. Această idee ne-a determinat să asimilăm amestecul de calcar și cenușă de pirită cu zgurile metalurgice, pentru a stabili proporția relativ optimă de calcar și cenușă în amestec. După cum

se știe, literatura și standardele indică condiția, pentru utilizarea zgurilor la cimenturi, de a conține o cantitate minimă de 37% oxid de calciu. Dintr-un calcul stoechiometric rezultă că echivalentul în calcar al conținutului de 37% oxid de calciu, este 66; prin urmare proporția componenților din amestec va fi de 66 g de calcar și 100 — 66 = 34 g cenușă de pirită, ce a fost menținută constantă la toate procentele de amestec utilizate, fapt ce este consemnat în tabele.

Lucrabilitatea pe pastă a acestor cimenturi, la procente mari de cenușă și de calcar în amestec, rămîne totuși grea, fiind ceva mai bună decît cea a cimenturilor cu calcar sau a cimenturilor cu cenușă de pirită, diferențiindu-se după natura cimentului întrebuințat. Astfel, în cazul cimentului RIM, cu un conținut mai mare în calce și celit II precum și cu o finețe de măcinare mai avansată, lucrabilitatea pe pastă la un conținut de 80% amestec de calcar și cenușă este cu mult mai grea decît în cazul cimentului portland, care are un conținut mai redus în acești componenți.

În procesul de hidratare a cimentului, apa este absorbită în deosebi în faza inițială a reacției, cu o viteză mare, de către particulele de ciment. În fazele următoare de hidratare difuzia apei în interiorul particulelor de ciment are loc cu o viteză mai mică și mai puțin uniformă. Viteza de hidratare scade pentru fiecare component al clincherului în ordinea următoare : C_3A, C_4AF, C_3S și C_2S. Datorită faptului că cenușa conține oxid de aluminiu și oxid feric, compuși care sînt conținuți și în C_4AF, rezultă prin analogie că aceștia se vor hidrata printre primii și astfel vor interveni în lucrabilitatea grea la procente mari, datorită cenușei de pirită. La aceasta se adaugă reacția calcarului cu aluminatul tricalcic, care se hidratează primul și care intervine în lucrabilitatea grea datorită calcarului. Faptul că compușii hidratați reacționează mai departe cu hidroxidul de calciu pus în libertate din ciment, influențează de asemenea într-o anumită măsură lucrabilitatea. Lucrabilitatea ceva mai bună, în cazul cimentului cu calcar și cenușă față de cimentul cu cenușă sau față de cimentul cu calcar, se explică prin faptul că în primul caz cele de 80% sînt formate din suma cantităților de calcar și cenușă, pe cînd în celelalte cazuri sînt constituite numai din calcar sau numai din cenușă.

De exemplu în cazul datelor din tabelul 1, cînd s-a lucrat cu un ciment RIM, cu apa de amestecare pentru pasta de consistență normală a cimentului simplu menținută constantă, lucrabilitatea pe pastă a fost foarte grea, încît la 80% s-au mai luat în plus 10 ml apă pentru a se putea lucra. În consecință, datorită lucrabilității grele la procentele de 60% și 80% pasta a luat forma inelului prin îndesare. Pentru datele din tabelul 2, obținute cu același ciment RIM, dar cu un exces de apă de amestec menținut constant, lucrabilitatea este mulțumitoare la un conținut de 60% în calcar și cenușă, în timp ce la un conținut de 80% lucrabilitatea a fost ceva mai grea dar totuși pasta a luat forma inelului.

Influența exercitată asupra timpului de priză de amestecul de calcar și cenușă este oglindită în tabelele 1...4 și în fig. 1...4, din care rezultă

Tabelul 1

Variația timpului de priză a cimentului RIM, în amestec cu calcarul și cenușa de pirită, cu apa de amestecare pentru pasta de consistență normală a cimentului simplu, menținută constantă

Nr. crt.	% în 100 g	Amestec			Apă amestec	a/c	Timpul de priză			Nepătrunderea acului (mm) după											Observ.
		calcar g	cenușă g	ciment g	%		început	sfîrșit	durata	1 h^{45}	2h	2^{15}	2^{30}	2^{45}	3h	3^{15}	3^{30}	3^{45}	4h	4^{15}	4^{30}	
0.	0	0	0	300	25	0,25	2 h^{15}	3 h^{15}	1 h			1	1	8	21	39						*)Apa de amestecare mărită datorită lucrabilității.
1.	5	9,9	5,1	285	25	0,26	2 h^{15}	3 h^{15}	1 h			1	5	12	30	39						
2.	10	19,8	10,2	270	25	0,27	2 h^{15}	3 h	0 h^{45}			1	8	21	39							
3.	15	29,7	15,3	255	25	0,29	2 h	2 h^{45}	0 h^{45}		1	16	32	39								
4.	30	59,4	30,6	210	25	0,35	1 h^{45}	2 h^{30}	0 h^{45}	1	11	36	39									
5.	60	118,8	61,2	120	25	0,62	2 h	3 h^{15}	1 h^{15}		1	5	17	35	38	39						
6.	80	158,4	81,6	60	28,3*)	1,41	2 h^{15}	4 h^{30}	2 h^{15}			1	3	5	8	10	14	16	26	37	39	

Tabelul 2

Variația timpului de priză a cimentului RIM, îm amestec cu calcarul și cenușa de pirită, cu apa de amestecare în exces față de pasta de consistență normală a cimentului simplu

Nr. crt.	% în 100 g	Amestec			Apă amestec %	a/c	Timpul de priză			Nepătrunderea acului (mm) după														
		calcar g	cenușă g	ciment g			început	sfîrșit	durata	2 h^{30}	2^{45}	3h	3^{15}	3^{30}	3^{45}	4 h	4^{15}	4^{30}	4^{45}	5 h	5^{15}	5^{30}	5^{45}	6 h
0.	0	0	0	300	33,33	0,33	3 h^{30}	4 h^{30}	1 h					1	12	25	37	39						
1.	5	9,9	5,1	285	33,33	0,35	3 h^{15}	4 h	0 h^{45}				1	6	20	39								
2.	10	19,8	10,2	270	33,33	0,37	3 h	3 h^{45}	0 h^{45}			1	7	23	39									
2.	15	29,7	15,3	255	33,33	0,39	2 h^{45}	3 h^{30}	0 h^{45}		1	16	27	39										
4.	30	59,4	30,6	210	33,33	0,47	2 h^{30}	3 h^{15}	0 h^{45}	1	12	35	39											
5.	60	118,8	61,20	120	33,33	0,83	3 h	4 h^{45}	1 h^{45}			1	3	7	9	12	23	37	39					
6.	80	158,4	81,6	60	33,33	1,66	3 h	6 h	3 h			1	3	5	8	9	17	18	18	20	25	33	38	39

Tabe

Variaţia timpului de priză a cimentului RIM, în amestec cu de consistenţă normală cores-

Nr. crt.	% în 100 g	Amestec			Apă amestec %	a/c	Timpul de priză		
		calcar g	cenuşă g	ciment g			început	sfîrşit	durata
0.	0	0	0	300	25	0,25	2 h^{15}	3 h^{15}	1 h
1.	5	9,9	5,1	285	25	0,26	2 h^{15}	3 h^{15}	1 h
2.	10	19,8	10,2	270	25	0,27	2 h^{15}	3 h	0h^{45}
3.	15	29,7	15,3	255	25	0,29	2 h	2 h^{45}	0h^{45}
4.	30	59,4	30,6	210	26,6	0,38	2 h	2 h^{45}	0h^{45}
5.	60	118,8	61,2	120	31,6	0,79	2 h^{45}	4 h^{30}	1 h^{45}
6.	80	158,4	81,6	60	33,3	1,66	3 h	6 h	3 h

Tabe

Variaţia timpului de priză a cimentului portland, în amestec cu calcar şi cenuşă de pirită, cu apa

Nr. crt.	% în 100 g	Amestec			Apă amestec %	a/c	Timpul de priză									
		calcar g	cenuşă g	ciment g			început	sfîrşit	durata	1 h^{30}	1^{45}	2 h	2^{15}	2^{30}	2^{45}	3 h	3^{15}
0.	0	0	0	300	33,33	0,33	2 h^{30}	6 h^{45}	4 h^{15}					1	1	1	1
1.	5	9,9	5,1	285	33,33	0,35	2 h^{15}	6 h^{15}	4 h				1	2	3	5	6
2.	10	19,8	10,2	270	33,33	0,37	2 h	6 h	4 h			1	3	4	9	10	12
3.	15	29,7	15,3	255	38,33	0,39	1 h^{45}	5 h^{45}	4 h		1	4	5	7	15	17	18
4.	30	59,4	30,6	210	33,33	0,47	1 h^{30}	5 h^{15}	3 h^{45}	1	5	7	8	9	12	15	21
5.	60	118,8	61,2	120	33,33	0,83	1 h^{30}	7 h	5 h^{30}	1	2	2	3	5	7	12	16
6.	80	158,4	81,6	60	33,33	1,66	3 h^{45}	10 h	6 h^{15}								

lul 3

calcar şi cenuşă de pirită, cu apa de amestecare pentru pasta punzătoare fiecărui procentaj

Nepătrunderea acului (mm) după															
2 h	2^{15}	2^{30}	2^{45}	3 h	3^{15}	3^{30}	3^{45}	4 h	4^{15}	4^{30}	4^{45}	5 h	5^{15}	5^{30}	5^{45}	6 h
	1	1	8	21	39											
	1	5	12	30	39											
	1	8	21	39												
1	16	32	39													
1	18	35	39													
			1	3	7	9	12	23	37	39						
				1	3	5	8	9	17	18	18	20	25	33	38	39

lul 4

de amestecare pentru pasta de consistenţă normală a cimentului simplu menţinută constantă

Nepătrunderea acului (mm) după																								
3^{30}	3^{45}	4h	4^{15}	4^{30}	4^{45}	5 h	5^{15}	5^{30}	5^{45}	6 h	6^{15}	6^{30}	6^{45}	7 h	7^{15}	7^{30}	7^{45}	8 h	8^{15}	8^{30}	8^{45}	9 h	9^{15}	9^{30}	10 h
1	2	3	4	7	12	17	22	25	34	35	37	38	39												
10	14	15	17	21	25	27	35	36	37	38	39														
15	19	20	25	28	30	32	35	36	38	39															
20	23	24	28	35	36	37	37	38	39																
25	26	27	30	35	37	38	39																		
15	17	18	19	24	27	28	30	32	35	37	37	38	38	39											
	1	3	4	6	7	8	9	10	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	23	24	27	34	35	37	39

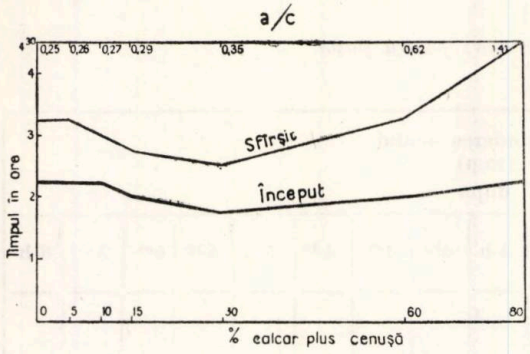


Fig. 1. — Variaţia timpului de priză a cimentului RIM, în amestec cu calcarul şi cenuşa de pirită, cu apa de amestecare pentu pasta de consistenţă normală a cimentului simplu menţinută constantă.

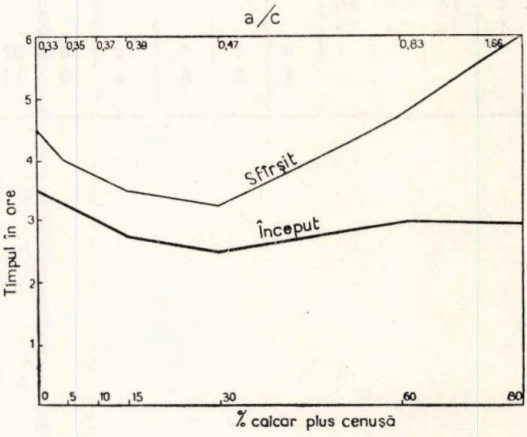


Fig. 2. — Variaţia timpului de priză a cimentului RIM, în amestec cu calcarul şi cenuşa de pirită, cu apa de amestecare în exces faţă de pasta de consistenţă normală a cimentului simplu.

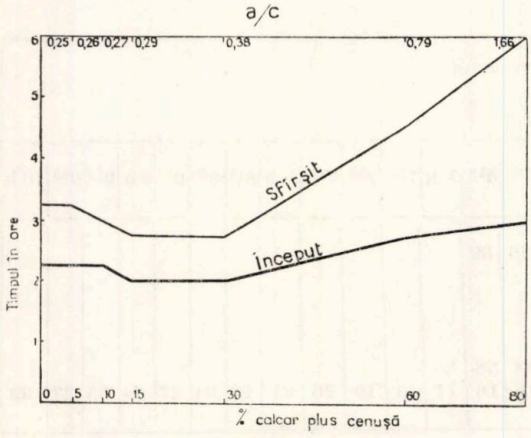


Fig. 3. — Variaţia timpului de priză a cimentului RIM, în amestec cu calcarul şi cenuşa de pirită, cu apa de amestecare pentru pasta de consistenţă normală corespunzătoare fiecărui procentaj.

o anumită staţionare a valorilor, în special la procentele mici. Aceste valori se situează între cele ale cimenturilor cu calcar şi cele ale cimenturilor cu cenuşă, predominînd mai mult influenţa calcarului, întrucît el intervine în amestec într-o proporţie mai mare ; calcarul influenţează în acest caz priza printr-o uşoară accelerare iar cenuşa printr-un efect de întîrziere.

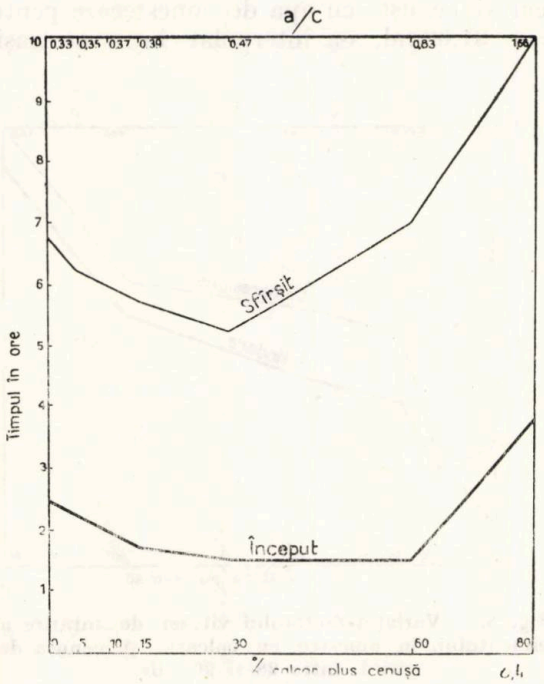


Fig. 4. — Variaţia timpului de priză a cimentului portland, în amestec cu calcarul şi cenuşa de pirită, cu apa de amestecare pentru pasta de consistenţă normală a cimentului simplu menţinută constantă.

Din tabele şi figuri se observă în toate cazurile că la procentul de 30% se obţin cele mai mici valori ale timpului de priză. Acest aspect indică o intensificare a reacţiilor care au loc în timpul prizei, fapt care corespunde, în cazul tratamentelor hidrotermice, după cum se va arăta, unui maxim al creşterii rezistenţelor mecanice, ceea ce îl poate recomanda pentru aplicare practică fără multe riscuri.

Din analiza tabelului 3, în care sînt redate valorile obţinute pentru variaţia timpului de priză a cimentului RIM în amestec cu calcarul şi cenuşa de pirită, cu apa de amestecare pentru pasta de consistenţă normală corespunzătoare fiecărui procentaj, se observă, cu excepţia ultimului procent, o păstrare

aproximativ constantă a valorilor prizei, ceea ce arată că proporția în care s-a luat calcarul și cenușa ar fi apropiată mult de cea optimă. Valorile prizei pentru procentele de 30% și 60% au rezultat prin interpolare ; astfel, pentru conținutul de 30% în calcar și cenușă, care are apa de amestecare pentru pasta de consistență normală, de 26,6 ml, s-a interpolat între 25% și 33,33% apă de amestecare iar pentru un conținut, în amestec de 60% calcar și cenușă, cu apa de amestecare pentru pasta de consistență normală de 31,66 ml, s-a interpolat între aceleași procente ca în cazul precedent.

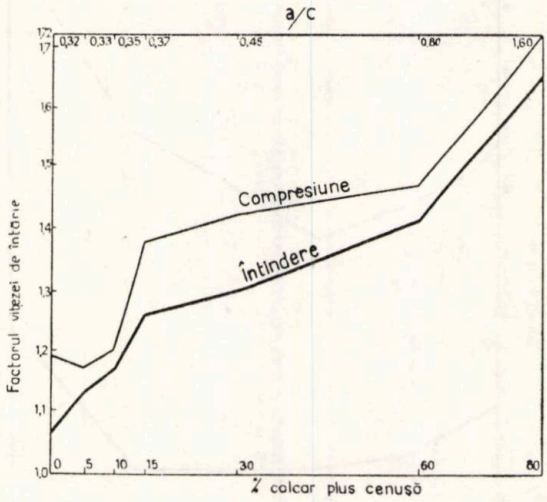


Fig. 5. — Variația factorului vitezei de întărire a cimentului, în amestec cu calcarul și cenușa de pirită, între 28 și 90 zile.

În tabelul 4 se reprezintă variația timpului de priză a cimentului portland, în amestec cu calcarul și cenușa de pirită, cu apa de amestecare pentru pasta de consistență normală a cimentului simplu, menținută constantă. Lucrîndu-se cu cimentul portland s-a obținut la procente mari, de 60% și 80%, o lucrabilitate relativ satisfăcătoare în comparație cu aceea a cimentului RIM, încît pasta a luat forma inelului numai prin batere laterală. Și aici se observă că cele mai mici valori ale timpului de priză se obțin la procentul de 30%.

După ce s-a analizat modul în care intervine amestecul de calcar și cenușă de pirită, în procesul prizei propriu-zise a cimentului, prezintă interes să se studieze evoluția ulterioară a procesului întăririi. În funcție de natura cimentului și de procentul de calcar și cenușă din amestec, s-a pus în evidență faptul că viteza de întărire variază după o anumită regulă. S-a exprimat această viteză de întărire prin factori, notați cu *f*, care pun în evidență de cîte ori sînt mai mari rezistențele mecanice la 90 zile față

Tabelul 5

Variația factorului vitezei de întărire a cimentului, în amestec cu calcar și cenușă de pirită, între 28 și 90 zile

Nr. crt.	% 100 g	Amestec			Apă amestec	a/c	R_c,90 zile	R_c,28 zile	$f_{compresiune}$	R_t,90 zile	R_t,28 zile	$f_{întindere}$
		calcar g	cenușă g	ciment g	ml		kgf/cm²	kgf/cm²		kgf/cm²	kgf/cm²	
0.	0	0	0	500	160	0,32	400	334	1,19	40	37,3	1,07
1.	5	16,5	8,5	475	160	0,33	378	322	1,17	37	32,7	1,13
2.	10	33,0	17,0	450	160	0,35	382	318	1,20	36,7	31,3	1,17
3.	15	49,5	25,5	425	160	0,37	408	294	1,38	38,6	30,4	1,26
4.	30	99,0	51,0	350	160	0,45	342	240	1,42	34,8	26,6	1,30
5.	60	198	102	200	160	0,80	200	136	1,47	21,2	15,0	1.41
6.	80	264	136	100	160	1,60	112	65	1,72	13,2	8,0	1,65

Tabelul 6

Variația coeficientului hidrotemic de întărire prin aburire și a rezistenței la compresiune a cimentului în amestec cu calcar și cenușă de pirită, pe mortare normale 1 : 3, după o păstrare de 28 zile în mediu umed, supus aburirii timp de trei ore la temperaturile de 40°, 60° și 80°C

Nr. crt.	% în 100 g	Amestec			Apă amestec ml	a/c	Rezistența la compresiune kgf/cm²				Coeficientul hidrotermic de întărire prin aburire		
		calcar g	cenușă g	ciment g			$t = 20°C$	$t = 40°C$	$t = 60°C$	$t = 80°C$	$t = 40°C$	$t = 60°C$	$t = 80°C$
0	0	0	0	500	160	0,32	402	408	436	352	1,01	1,08	0,87
1	5	16,5	8,5	475	160	0,33	401	429	441	353	1,07	1,10	0,88
2.	10	33	17	450	160	0,35	396	436	455	349	1,10	1,15	0,88
3.	15	49,5	25,5	425	160	0,37	393	437	470	354	1,11	1,20	0,90
4.	30	99,0	51,0	350	160	0,45	374	420	474	344	1,12	1,26	0,92
5.	60	198	102	200	160	0,80	150	194	212	170	1,29	1,41	1,13
6.	80	264	136	100	160	1,60	64	93	96	84	1,45	1,50	1,31

de cele la 28 zile. S-a ales acest interval de timp, pentru studiul întăririi, deoarece aceasta, în cazul cimentului simplu, evoluează mai lent, ceea ce se concretizează prin creşterea uşoară a rezistenţelor mecanice. Datele obţinute, trecute în tabelul 5, pun în evidenţă faptul că viteza de întărire, respectiv reacţiile chimice ce contribuie la procesul întăririi, cresc simţitor odată cu mărirea procentului de calcar şi cenuşă. Această observaţie rezultă pe baza creşterii valorilor factorului vitezei de întărire, atît la compresiune cît şi la întindere, concomitent cu descreşterea conţinutului în ciment şi cu mărirea raportului a/c. Variaţia valorilor lui f, la compresiune şi întindere, sînt reprezentate în diagramele din fig. 5.

În continuare se analizează modul în care evoluează întărirea hidrotermică prin aburire a cimenturilor amestecate cu calcar şi cenuşă de pirită. Acest proces a fost experimentat de asemenea pe mortare normale, cu raportul 1 : 3, la compresiune, după o păstrare a epruvetelor timp de 28 zile în mediu umed, cînd procesul de întărire a cimentului simplu se desfăşoară din ce în ce mai lent. Epruvetele au fost tratate termic prin aburire, timp de trei ore, la temperaturile de 40°, 60° şi 80°C, rezultatele încercărilor fiind înscrise în tabelul 6.

Se observă că la procentele de calcar şi cenuşă experimentate, se obţin creşteri importante ale rezistenţei la compresiune, care ajung la temperatura de 60°C pînă la 100 kgf/cm^2.

Efectuînd raportul dintre rezistenţa la compresiune la temperatura de tratare termică şi rezistenţa la compresiune la temperatura obişnuită, pe care să-l numim coeficient hidrotermic de întărire prin aburire, se constată la temperatura optimă o variaţie a lui cuprinsă între 1,08 şi 1,50. Acest fapt dovedeşte că după o păstrare a epruvetelor timp de 28 zile în mediu umed, în cazul acestui ciment, procesul de întărire prin aburire se intensifică mult în comparaţie cu cimentul simplu. Rezultatul acestei intensificări se bazează într-o mare măsură pe reacţiile chimice studiate anterior, de punere treptată în libertate din calcar a hidroxidului de calciu, cu ajutorul căruia se desăvîrşesc reacţiile chimice care contribuie la procesul de întărire. Prin urmare acest tratament hidrotermic întăreşte existenţa mecanismului de reacţie descris în § 2, pct. 1, cu atît mai mult cu cît valorile obţinute sînt mult superioare cimenturilor cu calcar sau cimenturilor cu cenuşă de pirită supuse tratamentului hidrotermic în aceleaşi condiţii.

4. Concluzii

În urma studiului întreprins rezultă următoarele concluzii :

1. Amestecul de calcar şi cenuşă de pirită, luat în proporţia de 66% calcar şi 34% cenuşă, influenţează priza cimentului portland sau RIM, cînd este utilizat în procentele de 5 ; 10 ; 15 ; 30 ; 60 şi 80%, printr-o staţionare relativă a valorilor ei, de unde reiese că această proporţie este apropiată de cea optimă. Se observă la procentele mici, de 5...30%, în general, o uşoară accelerare a procesului prizei şi o mică întîrziere, dar evidentă

la un conținut de 80%, în special, a sfîrșitului ei. Valorile cele mai mici ale timpului de priză au fost obținute, în toate cazurile, la un conținut de 30% în amestec, ceea ce indică o intensificare a reacțiilor chimice, fapt ce-l recomandă pentru studiu și utilizare.

2. Lucrabilitatea pe pastă, la conținuturi mari, de 60% și 80% în amestec, este grea și depinde de natura cimentului întrebuințat, necesitînd pentru îmbunătățirea ei introducerea adaosurilor tensioactive.

3. Viteza de întărire între 28 și 90 zile (respectiv reacțiile chimice ce contribuie la acest proces), după cum rezultă din tabelul 5, crește simțitor odată cu mărirea procentului de calcar și cenușă, descreșterea conținutului în ciment pur și mărirea raportului *a/c*.

4. Tratamentul hidrotermic efectuat după o păstrare de 28 zile a epruvetelor în mediu umed (v. tabelul 6), indică pe mortare normele 1 : 3, la temperatura de 60°C, creșteri ale rezistenței la compresiune ce ajung pînă la 100 kgf/cm^2. De asemenea coeficientul hidrotermic de întărire prin aburire are la temperatura optimă valori cuprinse între 1,08 și 1,50. Acest fapt dovedește că procesul de întărire prin aburire se intensifică mult, ca rezultat al reacției de punere treptată în libertate din calcar, după mecanismul de reacție descris în § 2, pct. 1, a hidroxidului de calciu, care contribuie la desăvîrșirea reacțiilor chimice ce au loc. Astfel, calcarul devine în ciment o sursă de hidroxid de calciu, cum de altfel rezultă și din creșterea valorii factorului vitezei de întărire.

5. Identificarea mecanismului de reacție descris în § 2, pct. 1, prezintă importanță pentru cimenturile cu calcar, sau în alte cazuri la mortarele de zidărie, deoarece introducerea în aceste materiale a unei sulfuri ușor hidrolizabile ar putea iniția aceste reacții ; de asemenea poate constitui o metodă de fabricare din calcar a varului.

Primită la 16 aprilie 1971

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de fundații și materiale de construcții,
Laboratorul de materiale de construcții

BIBLIOGRAFIE

1. Steopoe A., *Îndrumător pentru utilizarea cimenturilor în construcții.* Ed. Tehn., cap. VI, 1967, 137.
2. Nenițescu D. C., *Chimie Generală.* Ed. Tehn., Buc., 1963, 411, 736.
3. Malin M. K., Arkin L. N., Boreskov K. G. și Slinko M. G., *Tehnologia acidului sulfuric,* (trad. din l. rusă). Ed. Tehn., Buc., 1953.

CONSIDÉRATIONS CONCERNANT LA PRISE, LE RENFORCEMENT ET LE RENFORCEMENT HYDROTHERMIQUE DES CIMENTS EN MÉLANGE AVEC DU CALCAIRE ET DE LA CENDRE DE PYRITE

(Résumé)

On a étudié la prise des ciments en mélange avec du calcaire et de la cendre de pyrite, le renforcement entre 28 et 90 jours et le renforcement hydrothermique avec des vapeurs d'eau.

On a identifié un mecanisme catalytique de réaction par l'intermède du quel résulte le $Ca(OH)_2$.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1—2, 1972
Secția V
CONSTRUCȚII, ARHITECTURĂ

C. Z. 666.35

CONTRIBUȚII LA STUDIUL PREVENIRII FENOMENULUI DE EFLORESCENȚĂ LA CERAMICĂ*)

DE

FLORICA VASILESCU și ELISABETA PĂUNEL

1. Date generale

La multe construcții din zidărie de ceramică se întîlnesc fenomene de eflorescență, în special la cele mai vechi, la care nu s-a dat atenția cuvenită hidroizolațiilor. În mod deosebit, în cazul ceramicii aparente formarea lor imprimă un aspect dezagreabil fațadelor clădirilor (pete, decolorări); totodată ele contribuie la deteriorarea suprafeței zidăriei, provocînd exfolieri.

În consecință, după cum se știe, trebuie luate măsuri spre a se îndepărta cauza, prin transformarea sărurilor solubile din produsele ceramice în săruri insolubile, care nu mai pot fi transportate de către ape; trebuie redusă la minimum deplasarea apei prin zidărie, care transportă din sol (cînd izolația nu este corect realizată) și din mortarul de legătură, diferite săruri solubile; trebuie protejată suprafața zidăriei aparente spre a suferi cît mai puțin de pe urma precipitațiilor încărcate cu diferiți componenți dăunători, antrenați în special din atmosfera viciată, existentă în zonele industriale.

În lucrarea de față ne ocupăm numai de problema sărurilor solubile existente în produsele ceramice chiar din fabricație, experimentările realizîndu-se pe argilele gri din cariera de la Tomești, Iași, care se folosesc la fabrica Holboca. După cum se știe, la majoritatea fabricilor de cărămidă din țara noastră nu se iau măsuri speciale pentru a se împiedica formarea eflorescențelor la produsele realizate.

Agenții și factorii principali care interesează formarea eflorescențelor, sînt:

a) Sărurile solubile care se întîlnesc în produsele ceramice și care provoacă eflorescența, în mare măsură se află sub formă de Na_2SO_4, K_2SO_4, $MgSO_4$ și sînt cuprinse în materia primă, ori pot apărea în procesul de ardere cînd se utilizează combustibili bogați în sulf, cum ar fi $MgSO_4$, care se formează atunci cînd în argilă există $MgCO_3$. Într-o măsură mai re-

*) Prezentată în sesiunea științifică a Institutului politehnic din Iași, 27—30 septembrie 1967.

dusă se întîlnesc alți carbonați, cloruri, azotați, vanadați etc. solubili care pot fi transportați de ape prin zidăria ceramică.

b) Gradul de solubilitate al sărurilor solubile trebuie de asemenea să fie luat în considerație, căci numai cele ușor solubile vor avea drept efect formarea de eflorescențe. Sulfații (întîlniți mai frecvent în argilă și în produsele ceramice) au grade diferite de solubilitate ; cel mai solubil este $MgSO_4$ (circa 350 g/l) ; urmează Na_2SO_4 (circa 190 g/l), K_2SO_4 (circa 110 g/l) și $CaSO_4$, care are solubilitatea cea mai redusă dintre aceste săruri (circa 10 g/l) [1]. Se știe însă [1] că solubilitatea poate fi modificată în prezența altor săruri, fenomen care poate fi în favoarea sau în defavoarea procesului studiat. Cunoscîndu-l, trebuie dirijat în sensul favorabil reducerii și chiar a anulării fenomenului de formare a eflorescențelor. Cîteva exemple în acest sens sînt edificatoare. Astfel, $CaSO_4$, sare cu solubilitate redusă, în prezența ionilor străini, poate atinge o solubilitate cu circa 50% mai mare cînd este prezentă NaCl în proporție de 20% [1]. În consecință, la o argilă care are în compoziție și $CaSO_4$, ar fi greșit să se introducă NaCl ca adaos antiîngheț în scopul prelungirii procesului tehnologic de fabricație a ceramicii în lunile cu temperaturi scăzute. Fenomenul este contrar celui precedent cînd $CaSO_4$ este în prezența ionilor de aceeași natură. Prezența de CaO respectiv $Ca(OH)_2$ (20%) reduce solubilitatea cu circa 20% [1]. Acest fenomen permite să se considere că prezența de $CaCO_3$ într-o argilă în care se întîlnește și $CaSO_4$ nu numai că n-ar fi dăunător, dar chiar, în urma disocierii, reprezintă agentul care în zidăria de ceramică ar împiedica formarea de eflorescențe dar cu o condiție și anume, o mărunțire foarte fină și o bună omogenizare a argilei.

Fenomenul similar se poate produce chiar și în zidăria de ceramică cînd este realizată cu mortare pe bază de ciment ori de var ; aici $Ca(OH)_2$ transportat în ceramică de către apă reduce din solubilitate, respectiv din eflorescențele cauzate de $CaSO_4$.

c) Schimbul de ioni care poate să aibă loc în procesul de fabricație al ceramicii trebuie de asemenea valorificat în scopul îndepărtării eflorescențelor de pe suprafața produselor ceramice. S-a experimentat în acest scop, comparativ, $BaCl_2$ și $BaCO_3$, care după cum se știe, reacționînd cu sulfații solubili, atît în procesul de ardere cît și în zidărie (dacă s-ar adăuga în mortar), formează compuși insolubili ; se împiedică astfel procesul de formare a eflorescențelor [1]).

d) Pentru a nu exista pericolul formării de eflorescențe, după Hummel sărurile ușor solubile se admit în proporție de maximum 0,08% iar după Lipinski sulfații de Mg, de Na și de K se admit în proporție de maximum 0,05%. În cazul argilelor din Moldova condiția este destul de severă avîndu-se în vedere compoziția lor chimico-mineralogică [3]...[6].

---

[1]) În cazul prezenței de Na_2SO_4 în argilă :
$Na_2SO_4 + BaCO_3 \rightarrow BaSO_4 + Na_2CO_3$,
$Na_2SO_4 + BaCl_2 \rightarrow BaSO_4 + 2NaCl$.

2. Date de laborator

2.1. Caracteristicile argilei

S-a folosit argila gri din cariera de la Tomești, Iași, introdusă în circuitul tehnologic al fabricii de produse ceramice Holboca, Iași. Această argilă conține componenți solubili (tabelul 1), în special sub formă de carbonați (mai puțin de sulfați) de calciu, urmînd apoi cei de magneziu, cei de sodiu fiind în proporție mult mai redusă ; clorurile nu s-au examinat.

Tabelul 1

Compoziția chimică a argilei gri de la Tomești, Iași

Componenții determinați %	Rezultatele pe probe medii din trei zone ale carierei
P.C.	7,57...10,96
SiO_2	50,72...56,48
R_2O_3	19,80...21,85
$Al_2O_3 + TiO_2$	14,17...15,74
Fe_2O_3	4,72... 7,11
CaO	5,82... 7,65
MgO	2,90... 3,87
Na_2O	0,68... 1,05
K_2O	2,65... 2,66
SO_3	0,12... 0,15
CO_2	6,88... 6,91

Fracțiunea argiloasă ($\ll 0{,}06$ mm) este constituită din : montmorillonit, biotit, hidrobiotit, cuarț și alofane, componenți determinați roentgenografic, prin analiza termică diferențială și la microscopul electronic [3].

2.2. Determinarea eflorescenței pe epruvete

S-au realizat epruvete de dimensiuni $16 \times 8 \times 3$ cm în următoarele condiții :

a) din argilă gri (probele martor) ;

b) din argilă gri cu adaosuri de săruri solubile în proporții diferite (tabelul 2) ;

c) din argilă gri cu adaosuri de săruri solubile + $BaCl_2$ ori $BaCO_3$ (în proporții calculate stoechiometric față de conținutul în săruri solubile).

S-a urmărit comparativ caracterul eflorescențelor pe epruvetele uscate și apoi pe cele arse. Pentru a grăbi apariția eflorescențelor s-a aplicat

Tabelul 2

Rezultatele obținute pe probe uscate și pe probe arse realizate din argila gri de Tomești cu diferite adaosuri de săruri care influențează procesul formării eflorescențelor la ceramică

Adaosul	Nr. probei		Adaos %		Intensitatea eflorescenței		Culoarea eflorescenței		Observații la probă:	
	nearsă	arsă	nearsă	arsă	nearsă	arsă	nearsă	arsă	nearsă — suprafața	arsă — suprafața
	1 *a*	2 *a*	2	2	f. puternică	moderată	albă	pete intense	100% eflorescență	20% eflorescență
	1 *b*	2 *b*	1	1	puternică	slabă	albă	pete intense	≈ 60% efloresc.	5% efloresc.
Na_2SO_4	1 *c*	2 *c*	0,5	0,5	slabă	nulă	albă	pete slabe	≈ 10% efloresc.	
(fig. 1, 2)	1 *d*	2 *d*	0,25	0,25	slabă	nulă	albă	pete slabe	≈ 5% eflorescență	—
	1 *e*	2 *e*	0,12	0,12	f. slabă	nulă	albă	pete de aceeași culoare	≈ 3% eflorescență	—
	1 *f*	2 *f*	M	M	nulă	nulă	albă	absentă	—	—
	3 *a*	3 *b*	1	1	slabă	nulă	albă	pete	≈10% eflorescență	—
Cl_2Ba	3 *c*	3 *d*	0,5	0,5	nulă	nulă	—	—	—	culoare neunif.
	3 *e*	3 *f*	0,12	0,21	nulă	nulă	—	—	—	culoare neunif.
	4 *a*	4 *b*	2	3,43	nulă	nulă	griatică	pete	—	—
Cl_2Ba și	4 *b*	4 *c*	1	1,71	nulă	nulă	—	pete	—	—
Na_2SO_4	4 *e*	4 *f*	0,25	0,42	nulă	nulă	—	pete	—	—
(fig. 3)	4 *g*	4 *h*	0,12	0,12	nulă	nulă	—	—	—	culoare deschisă și uniformă
Na_2SO_4 și $BaCO_3$	5 *a*	5 *b*	2	2,70	nulă	f. slabă	griatică	pete	eflorescență cu aspect granulat	eflorescență cu aspect granulat
	5 *c*	5 *d*	1	1,35	nulă	f. slabă		pete	—	—
	6 *a*	6 *b*	1	1	nulă	nulă	—	—	—	eflorescență neuniformă deschisă
$MgSO_4$	6 *c*	6 *d*	0,5	0,5	nulă	nulă	—	—	—	—
	—	6 *f*	—	0,25	nulă	nulă	—	—	—	—
$MgSO_4$ și Cl_2Ba	7 *a*	7 *b*	0,25	4,03	nulă	nulă	—	—	—	—
$CaSO_4$	8 *a*	8 *b*	1	1	nulă	nulă	—	—	—	—
$(NH_4)_2SO_4$	9 *a*	9 *b*	1	1	nulă	nulă	—	—	—	—
$(NH_4)_2SO_4$ și Cl_2Ba	10 *a*	10 *b*	1	1,84	nulă	nulă	—	—	—	—

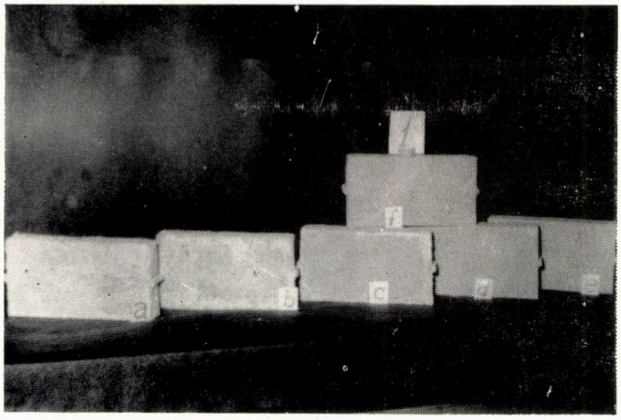


Fig. 1. — Probe uscate din argilă gri de Tomești cu adaos de Na_2SO_4.

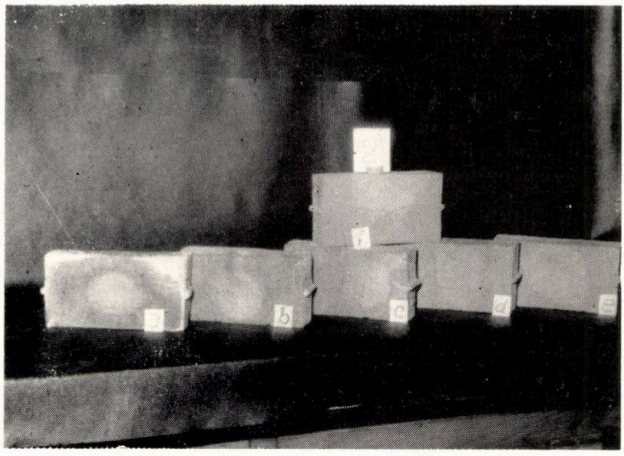


Fig. 2. — Probe din argilă arsă cu adaos de Na_2SO_4.

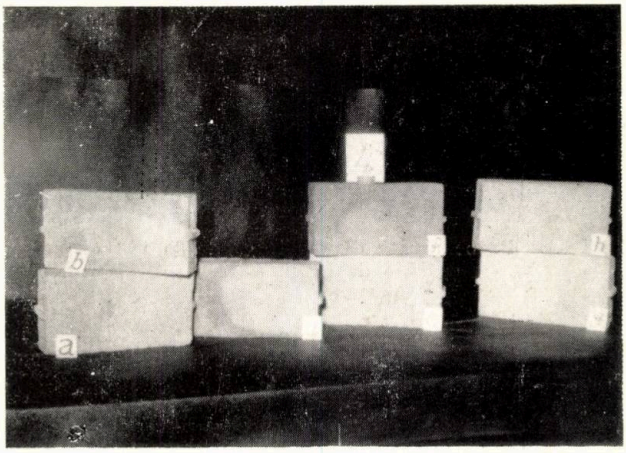


Fig. 3 — Probe uscate (*a*, *d*, *e*, *g*) şi probe arse (*b*, *f*, *h*) din argilă gri cu adaos de $Na_2SO_4 + BaCl_2$.

metoda indicată în STAS 230-52, care se referă la determinarea calitativă a sărurilor solubile din ceramică. Rețetele experimentate și rezultatele obținute sînt prezentate rezumativ în tabelul 2 ; fotografii ale cîtorva probe sînt redate în fig. 1...3 [2], [3].

3. Observații și concluzii

1. La probele ceramice din argilă gri de Tomești, Iași, (compoziția chimică redată în tabelul 1), pe zonele în care circulația și apoi evaporarea soluțiilor apoase au fost intense, apar pete de culoare mai deschisă decît pe restul produsului ; nu apar eflorescențe evidente sub formă de săruri cristalizate la suprafață (fig. 1, proba *f*).

2. Prin adăugarea de Na_2SO_4 în proporție de 2...0,12% la argila gri de Tomești (luată drept etalon), s-a putut urmări caracterul eflorescențelor, care apar mai intens la probele crude (fig. 1) decît la cele arse (fig. 2) și cu cît proporția de sare adăugată este mai mare (v. fig. 1 și 2, probele *a* față de probele *e*). La proporțiile de 0,5...0,12% eflorescențele ocupă mai puțin de 10% din suprafața produsului, se manifestă îndeosebi sub forma de pete și nu apar săruri cristalizate care se observă cu ochiul liber, așa cum se întîlnesc la probele cu mai mult de 0,5% săruri solubile.

$BaCl_2$, adăugată la probele care conțin 2...0,12% Na_2SO_4, dă rezultate pozitive în ceea ce privește anularea eflorescențelor, căci nu mai apar săruri iar petele de la suprafața epruvetelor au o intensitate mai redusă (fig. 3).

Adaosul de $BaCO_3$, în același scop ca și cel de $BaCl_2$, s-a dovedit mai puțin eficace, deoarece suprafața epruvetelor a căpătat un aspect granular inestetic.

Adaosurile de $CaSO_4$ și $(NH_4)_2SO_4$ nu produc eflorescențe vizibile.

3. Din experimentările efectuate rezultă că produsele ceramice realizate din argilă care conține mai mult de 0,12% săruri solubile, în special sub formă de Na_2SO_4 și $MgSO_4$, vor manifesta fenomene evidente de eflorescență.

Anularea eflorescențelor se obține introducînd în argilă $BaCl_2$ calculat stoechiometric, dizolvat în apa care se introduce la prepararea pastei. Se impune o bună omogenizare a pastei.

Primită la 15 aprilie 1968

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de fundații și materiale de construcții,
Laboratorul de materiale de construcții

---

[2] Dozajele sînt indicate în tabelul 2.

[3] Epruvetele s-au introdus în cuptor după ce s-au îndepărtat prin ștergere sărurile cristalizate la suprafață.

BIBLIOGRAFIE

1. Brownell W. E., *Eflorescenţe datorită sulfaţilor din materiile prime argiloase.* Materiale de construcţii, Caiet selectiv, *9*, 22 (1959).
2. * * * *Care sînt cauzele apariţiei eflorescenţei la ţigle şi cărămizi şi cum pot fi evitate aceste deficienţe.* Materiale de construcţii, Caiet selectiv, *4*, 231—233 (1962).
3. Păunel E., Nichita O., Branişte C., Vasilescu Fl., Iorga N., Caraman C., *Contribuţii la studiul argilelor din regiunea Iaşi, ca materie primă pentru ceramică.* Comunicare prezentată la sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic, Iaşi, sept. 1967 (sub tipar).
4. Idriceanu T., Iorga N., Erhan V., *Cercetări mineralogice asupra unor argile sarmatice din podişul Moldovenesc.* St. şi cerc. şt., Acad. R.P.R., filiala Iaşi, Chimie, *1*, 103—111, (1963).
5. Idriceanu T., Iorga N., Erhan V., Poenescu I., Bosnea L., *Cercetări mineralogice asupra unor argile sarmatice din regiunea Iaşi.* An. şt., Univ. „Al. I. Cuza", Iaşi, Şt. nat., **VI**, *4*, 205—215 (1960).
6. Idriceanu T., Iorga N., Erhan V., Covali G., *Cercetări mineralogice şi geochimice asupra unor argile sarmatice şi a depozitelor loessoide din terasele Prutului dintre localităţile Probota şi Romăneşti.* An. şt. Univ. „Al. I. Cuza", Iaşi, Şt. nat., **XII**, 1—12 (1966).
7. Schmidt E., *Cunoştinţe noi în domeniul eflorescenţelor pe zidării.* Caiet selectiv, Materiale de construcţii, *2*, 94—99 (1966).
8. Schmidt E., *Noi cunoştinţe în domeniul eflorescenţei pe zidării.* Materiale de construcţii, Caiet selectiv, *9*, 525—538 (1966).
9. * * * *Cauzele decolorării cărămizilor.* Materiale de construcţii, Caiet selectiv, *9*, 58—59 (1959).
10. * * * *Eflorescenţele şi petele care apar pe zidărie de cărămidă.* Materiale de construcţii, Caiet selectiv, *3*, 171—176 (1966).

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE LA PRÉVENTION DU PHÉNOMÈNE D'EFFLORESCENCE DE LA CÉRAMIQUE

(Résumé)

On étudie le problème de la formation des efflorescences à la suite de la présence des sels solubles dans la matière première et dans le produit céramique.

On a expérimenté en laboratoire l'argile grise de la carrière de Tomeşti, près de Jassy, argile qui est utilisée pour la fabrication des produits céramiques. Dans cette argile ont été introduites, expérimentalement, des différents sels solubles, capables d'accentuer les conditions de formation des efflorescences ; comparativement ont été introduites d'autres sels ($BaCl_2$, $BaCO_3$) pour annuler l'effet des sels solubles.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 1—2, 1972
Secția V
CONSTRUCȚII, ARHITECTURĂ

C. Z. 666,93 ; 691.324

COMPORTAREA CIMENTURILOR CU CENUȘĂ DE PIRITĂ ÎN ALCĂTUIREA MORTARELOR*)

DE

C. BRANIȘTE, I. BURLACU, AURORA BORDEA și RODICA MATEI

1. Introducere

Cimenturile amestecate pot fi utilizate, în general, numai cu procente mici de cenușă de pirită datorită faptului că la procente mai mari decît 30% (limită ce depinde și de compoziția cenușii), apar unele fenomene dăunătoare în piatra de ciment. În primul rînd cimentul, odată cu creșterea conținutului în cenușă devine din ce în ce mai sărac în oxid de calciu (cenușa de pirită are o cantitate redusă de oxid de calciu și aceeea combinată). Compoziția cenușii întrebuințate în experiențele noastre, provenită din pirită obișnuită, arsă la Combinatul Chimic de la Valea Călugărească, este următoarea :

SiO_2	= 12,09%	Cu	= 0,31%
Fe_2O_3	= 62,50%	As	= 0,037%
Al_2O_3	= 11,23%	Au	= 1,0 g/tonă
TiO_2	= urme	Ag	= 5,6 g/tonă
MnO	= urme	Po	= urme
CaO	= 1,53%	Zn	= 4,22%
S	= 5,41%	P_2O_5	= 0,27%

Odată cu creșterea conținutului în cenușă, după cum se poate observa din compoziția dată, crește și conținutul în compuși ai sulfului. Conținutul în sulfați poate duce la fenomenul nedorit al neconstanței de volum.

Fenomenul măririi de volum nu poate fi recunoscut nici prin proba de fierbere, nici prin proba cu apă rece, după 28 zile, și deci se iau în considerație prescripțiile prevăzute în standarde care fixează valorile maxime în anhidridă sulfurică. Se poate ușor constata, după compoziție, că cenușa de pirită nu are capacitatea pe care o posedă cimentul de a se întări singură. Datorită acestui fapt și în special datorită compoziției sale, pentru a întrebuința cenușa de pirită ca adaos la ciment, este mai indicat să fie combinată cu un alt material, să se caute a-i activa componenții, ținînd seama că prin compoziția sa ea complică și mai mult fenomenele fizice și chimice legate de hidratarea și hidroliza cimentului.

Unul din componenții principali ai cenușii care poate interveni în procesul întăririi cimentului este bioxidul de siliciu, care însă sub forma în care se află reacționează mai lent, reacția depinzînd de natura cimentului. Astfel, bioxidul de siliciu intervine mai. activ în cazul cimentului RIM și mai puțin activ în cazul cimentului portland. Se poate

*) Prezentată în sesiunea științifică a Institutului politehnic din Iași, 2—4 iulie 1970

presupune că cimentul RIM, cu un conţinut mai ridicat în oxid de calciu, a activat mai intens componenţii cenuşei de pirită şi în special bioxidul de siliciu, sub forma în care se află în cenuşă. Trebuie de subliniat faptul că întărirea proprie a cimentului cu care este amestecată cenuşa de pirită, favorizează reacţiile de întărire a componenţilor acesteia, deci şi a bioxidului de siliciu, care este astfel activat de ciment. Oxizii de aluminiu conţinuţi în cenuşă constituie al doilea component care joacă un rol important în procesul întăririi. Ţinînd seama că după un anumit timp o parte din sulful existent în cenuşă trece în sulfaţi, aceştia pot exercita un fenomen de autoactivare în care caz oxizii de aluminiu care dau aluminaţi, apoi sulfat-aluminaţi, pot influenţa pozitiv, în anumite cazuri, procesul. De asemenea sulfaţii din cenuşă vor reacţiona cu aluminaţii cimentului, celit II, cu efecte condiţionate şi de proporţia în care se găsesc aceşti sulfaţii.

Cenuşa mai conţine şi oxizi ferici (Fe_2O_3) precum şi oxizi feroferici (Fe_3O_4). Se poate considera că a avut loc o ardere cu atît mai completă a piritei cu cît conţinutul de oxid feroferic în cenuşă este mai redus iar conţinutul în oxid feric (de culoare roşie) mai ridicat [1]. Deoarece cenuşa întrebuinţată a rezultat dintr-un proces tehnologic de ardere completă a piritei, oxidul feric care se găseşte într-o proporţie ridicată va tinde şi el să influenţeze anumite proprietăţi. Deci şi acesta reprezintă unul dintre factorii care determină limita de întrebuinţare a cenuşii, prin reacţiile iniţiale care au loc la hidratare :

$$Fe_2O_3 + 3\,H_2O = 2\,Fe(OH)_3\,.$$

Prin hidratarea oxidului feric se consumă apă, fapt care contribuie şi el la obţinerea unei lucrabilităţi grele la procente mari de cenuşă dar care sînt neutilizabile [1]. Odată cu formarea feritului de calciu, ca rezultat al reacţiei cu hidroxidul de calciu,

$$2\,Fe(OH)_3 + Ca(OH)_2 = Fe_2O_3.CaO + 4\,H_2O,$$

se pune în libertate o cantitate de apă mai mare decît cea echivalentă, absorbită la hidratarea oxidului feric. Această cantitate de apă se face resimţită începînd cu conţinuturile mai mari decît 30% în cenuşă, real neutilizabile, cînd se pune în libertate o mare cantitate de apă din reacţie. Drept efect apare un fenomen de întîrziere sau chiar de involuţie a procesului de priză [1], încît epruvetele realizate cu mortare normale 1 : 3 nu se mai pot introduce în mediu umed după 24 ore, datorită faptului că se desfac şi în consecinţă ele trebuie lăsate 48 ore sau chiar mai mult. Deci un indiciu al formării feritului de calciu îl constituie şi apariţia pe epruvete a picăturilor de apă precum şi desfacerea epruvetelor la introducerea după 24 ore în mediu umed, începînd cu conţinuturile în cenuşă de 30% şi mai mari. Conţinutul în sulf al cenuşii de pirită determină de asemenea valoarea procentului de cenuşă utilizabil.

În cele ce urmează se vor studia experimental conţinuturile în cenuşă de pirită pînă la 30%, cele mai mari fiind inutilizabile, însoţite de fisuri sau chiar crăpături ale epruvetelor din mortare normale 1 : 3.

2. Partea experimentală

S-a studiat, în special, variaţia în timp a rezistenţelor mecanice, în cazul mortarelor normale 1 : 3, constituite din 500 g liant (ciment + + cenuşă), 1 500 g nisip normal şi 160 ml apă. Cenuşa de pirită a fost luată în proporţiile de 5 ; 10 ; 15 şi 30 părţi în 100 părţi amestec de ciment şi cenuşă. Cenuşa a fost în prealabil măcinată şi cernută la o fineţe apropiată de cea a cimentului. S-a utilizat ciment portland şi apoi ciment RIM, cu care s-a amestecat cenuşa în proporţiile de mai sus, realizînd epruvetele, păstrîndu-le şi încercîndu-le în condiţiile standardizate, la 3 ; 7 ; 28 ; 56 şi 90 zile.

În tabelul 1 sînt indicate valorile obţinute pentru rezistenţa la compresiune, iar în tabelul 2 cele pentru rezistenţa la întindere, experimentate pe ciment portland. Din aceste tabele rezultă proporţiile de cenuşă de pirită existente în 100 g amestec şi precizate cantităţile în grame de cenuşă şi ciment. De asemenea se indică variaţia raportului apă : ciment pur, deşi s-a păstrat constantă cantitatea de 160 ml apă, care rezultă prin

Tabelul 1

Rezistenţa la compresiune a cimentului portland, în amestec cu cenuşa de pirită, pe mortare normale 1 : 3

Nr. crt.	% în 100 g	Amestec		a/c	Rezistenţa la compresiune kgf/cm²					Observ.
		cenuşă	ciment		3 zile	7 zile	28 zile	56 zile	90 zile	
0.	0	0	500	0,32	219	293	444	485	490	
1.	5	25	475	0,33	217	288	409	466	512	
2.	10	50	450	0,35	200	279	407	486	509	
3.	15	75	425	0,37	189	260	393	478	482	
4.	30	150	350	0,45	156	210	334	404	411	
5.	60	300	200	0,80	—	—	46	57	66	Orientativ
6.	80	400	100	1,60	—	—	29	36	52	Orientativ

Tabelul 2

Rezistenţa la întindere a cimentului portland, în amestec cu cenuşa de pirită, pe mortare normale 1 : 3

Nr. crt.	% în 100 g	Amestec		a/c	Rezistenţa la întindere kgf/cm²					Observ.
		cenuşă	ciment		3 zile	7 zile	28 zile	56 zile	90 zile	
0.	0	0	500	0,32	22,5	27,0	42,5	43,0	46,0	
1.	5	25	475	0,33	21,8	26,7	40,4	44,0	46,4	
2.	10	50	450	0,35	22,6	25,8	40,0	44,2	47,9	
3.	15	75	425	0,37	20,9	24,2	43,5	45,5	49,0	
4.	30	150	350	0,45	16,7	19,6	31,1	34,9	35,0	
5.	60	300	200	0,80	—	—	8,0	9,2	10,3	Orientativ
6.	80	400	100	1,60	—	—	6,0	7,9	8,5	Orientativ

scăderea conţinutului în ciment odată cu creşterea conţinutului în cenuşă, încît valoarea raportului se va mări. Examinînd tabelul 1 şi fig. 1 se observă că în cazul cimentului portland utilizat se obţin mici sporuri de rezistenţă la compresiune, dar la intervale mari de timp şi anume la 90 zile. În toate celelalte cazuri valoarea rezistenţei la compresiune scade cu creşterea conţinutului în cenuşă.

Rezistenţa la întindere este reprezentată de valorile cuprinse în tabelul 2 şi în diagramele din fig. 2, de unde rezultă că apar creşteri mai evidente ale rezistenţelor la întindere, după o păstrare a epruvetelor în mediu umed de 56 respectiv 90 zile, în special la proporţiile mici de cenuşă şi anume pînă la 15%. În schimb în cazul unui conţinut de 30% în cenuşă, în toate cazurile studiate apar valori micşorate faţă de cele ale probelor martor, atît la compresiune cît şi la întindere. Acest fapt poate fi pus pe

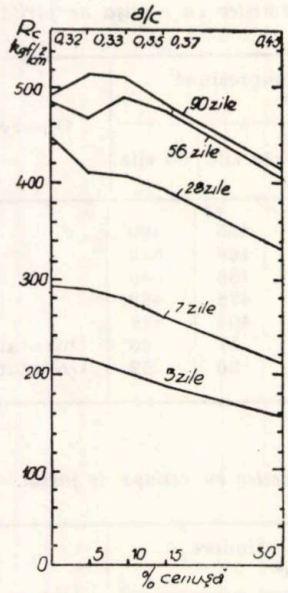
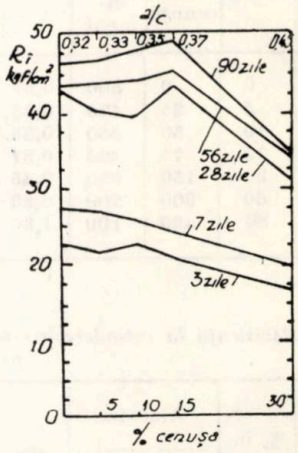


Fig. 1. — Rezistenţa la compresiune a cimentului portland, în amestec cu cenuşa de pirită, pe mortare normale 1 : 3.



Fig; 2. — Rezistenţa la întindere a cimentului portland, în amestec cu cenuşa de pirită, pe mortare normale 1 : 3.

seama creşterii volumului de fisuri, pori sau crăpături, ca rezultat al acţiunii apei fie de cristalizare, fie produsă din reacţie, sau al formării unui compus cu neconstanţă de volum, cum se întîmplă în cazul sulfoaluminatului tricalcic hidratat. De asemenea este posibil ca silicea din cenuşă (la proporţia de 30%) să nu fi fost activată complet pentru a forma silicaţi hidrataţi, care imprimă în special efectele pozitive de creştere a rezistenţelor mecanice, şi aceasta din cauza unei insuficiente cantităţi de hidroxid de calciu.

În tabelele 3 şi 4 sînt reprezentate rezultatele aceloraşi încercări experimentale, de data aceasta cu ciment RIM, pentru a stablli modul în care influenţează natura acestui ciment procesul reacţiilor de întărire, concretizate prin rezistenţele mecanice obţinute. Spre deosebire de cimentul portland, ci-

mentul RIM favorizează mult mai mult reacţiile componenţilor cenuşii de pirită. Astfel, în noul sistem caracterizat în special printr-un conţinut mai ridicat al cimentului în oxid de calciu şi în aluminat tricalcic (celit II) şi o fineţe de măcinare mai avansată, se observă efecte pozitive de creştere a rezistenţelor mecanice chiar din primele zile de întărire.

Tabelul 3

Rezistenţa la compresiune a cimentului RIM, în amestec cu cenuşă de pirită. pe mortare normale 1 : 3

Nr. crt.	% în 100 g	Amestec		a/c	Rezistenţa la compresiune kgf/cm²				
		cenuşă	ciment		3 zile	7 zile	28 zile	56 zile	90 zile
0.	0	0	500	0,32	274	321	402	408	421
1.	5	25	475	0,33	284	337	420	425	431
2.	10	50	450	0,35	290	340	437	442	447
3.	15	75	425	0,37	275	323	392	404	425
4.	30	150	350	0,45	261	296	345	389	405

Tabelul 4

Rezistenţa la întindere a cimentului RIM, în amestec cu cenuşa de pirită, pe mortare normale 1 : 3

Nr. crt.	% în 100 g	Amestec		a/c	Rezistenţa la întindere kgf/cm²				
		cenuşă	ciment		3 zile	7 zile	28 zile	56 zile	90 zile
0.	0	0	500	0,32	25,3	26,9	32,7	35,3	36,3
1.	5	25	475	0,33	26,8	31,8	33,1	36,1	37,5
2.	10	50	450	0,35	28,7	32,0	33,9	37,6	36,0
3.	15	75	425	0,37	27,8	33,7	34,4	35,9	37,2
4.	30	150	350	0,45	26,2	30,1	31,8	34,8	35,9

Din tabelul 3 şi fig. 3 se observă că începînd chiar de la trei zile de întărire, valoarea rezistenţei la compresiune este influenţată pozitiv, în general, pînă la conţinutul de 15% în cenuşă, iar la procentul de 30%, scăderea valorii rezistenţei la compresiune faţă de cea a probei martor se micşorează considerabil, comparativ cu cea a cimentului portland. La celelalte intervale de timp, de 7 ; 28 ; 56 şi 90 zile, valorile rezistenţei la compresiune, în funcţie de creşterea conţinutului în cenuşă, evoluează, în general, asemănător, obţinîndu-se sporuri mai apreciabile decît în cazul cimentului port-

land. Acest fapt permite să se afirme că silicea din cenuşă, în cazul cimentului RIM, a reacţionat mai intens, fie ca rezultat al unei activări a ei, ceea ce trebuie considerat în primul rînd, fie că a reacţionat cantitativ mai mult, tinzînd spre reacţia totală. Cimentul RIM fiind mai bogat în celit II, hidroaluminaţii care rezultă favorizează mult atacul sulfocalcic şi prin urmare de data aceasta sulfoaluminatul tricalcic hidratat care se

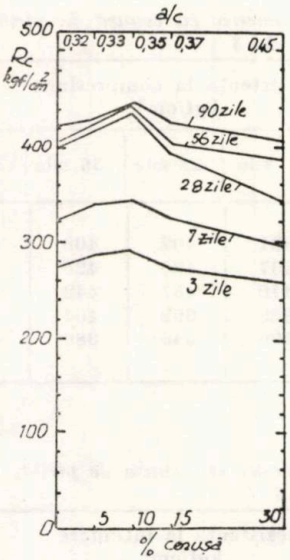


Fig. 3. — Rezistenţa la compresiune a cimentului RIM, în amestec cu cenuşa de pirită, pe mortare normale 1 : 3.

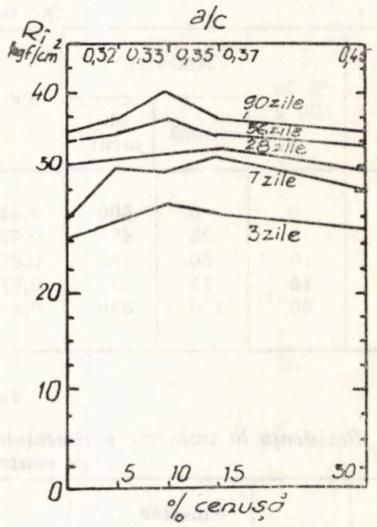


Fig. 4. — Rezistenţa la întindere a cimentului RIM, în amestec cu cenuşa de pirită, pe mortare normale 1 : 3.

formează nu mai are acelaşi efect dăunător ca în cazul cimentului portland, ci dimpotrivă favorizează întărirea, fapt dovedit în special în cazul conţinutului de 30% în cenuşă, cînd micşorarea rezistenţei faţă de proba martor se reduce simţitor la cimentul RIM în comparaţie cu cimentul portland .

În tabelul 4 şi fig. 4 sînt prezentate, fie valoric fie pe diagrame, variaţia rezistenţei la întindere a epruvetelor din amestec de ciment RIM cu cenuşă de pirită, în funcţie de durata de întărire şi de conţinutul în cenuşă şi se constată că se obţin sporuri de rezistenţe la perioade mici de întărire. Valorile rezistenţelor, în cazul unui conţinut de 30% în cenuşă, sînt apropiate de cele ale probelor martor.

3. Concluzii

Din studiul efectuat referitor la comportarea epruvetelor din mortare normale 1 : 3, în ce privește evoluția în timp a rezistențelor mecanice, la cimentul cu cenușă de pirită, rezultă că :

1. Cenușa de pirită introdusă în proporții mici poate influența rezistențele mecanice, în funcție de natura cimentului întrebuințat, în modul următor :

a) În cazul cimentului portland rezistențele scad concomitent cu creșterea conținutului în cenușă, și numai după intervale mai mari de timp, de două sau de trei luni, se pot obține sporuri de rezistență la proporții mici (de 5 pînă la 15%).

b) În cazul cimentului RIM, ca rezultat al unei activări a componenților cenușii de pirită, datorită conținutului mai bogat în oxid de calciu, în aluminați precum și ca urmare a măcinării mai fine a cimentului, se obțin sporuri de rezistență chiar din primele zile de întărire.

2. Din studiul experimental întreprins reiese o comportare mai bună a amestecurilor studiate la proporțiile mici de cenușă (de 5...15%), față de cele cu proporții mai mari, de exemplu 30%, cînd apare pericolul unui volum mult mai mare de fisuri, respectiv crăpături, cu efecte negative asupra rezistenței betonului. Conținutul în sulf al cenușii are și el, de asemenea, o deosebită importanță.

Primită la 7 iunie 1971

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de fundații și materiale de construcții,
Laboratorul de materiale de construcții

BIBLIOGRAFIE

1. Burlacu I., *Considerații asupra prizei, întăririi și întăririi hidrotermice a cimenturilor cu cenușă de pirită.* Comunicare prezentată în sesiunea științifică a Inst. polit. Iași, 2—4 iulie 1970.
2. Kühl H., Schleicher E., *Ciment de sgură sulfatată,* (trad. din l. germană). IDT, Buc., 1952.
3. Steopoe A., *Îndrumător pentru utilizarea cimenturilor în construcții.* Ed. Tehn., Buc., 1970.

COMPORTEMENT DES CIMENTS CONTENANT CENDRE DE PYRITE, DANS LA RÉALISATION DES MORTIERS

(Résumé)

Le but de cette étude a été de constater l'influence exercée par la cendre de pyrite usuelle, en mélange avec du ciment, sur des mortiers normaux 1 : 3. Les résultats ont été appreciés surtout selon la variation de la résistance à la compression et à la traction, à différents intervalles de temps.

Nr. coli tipar 9,50

Tiparul executat la Întreprinderea poligrafică
Iaşi, str. Vasile Alecsandri nr. 12, sub cd. 233
Republica Socialistă România

1973 JUL 4 PM

40822

F 1503/5

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

TOMUL XVIII (XXII)

Fasc. 3–4

SECŢIA V CONSTRUCŢII ARHITECTURĂ

1972

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI

TOMUL XVIII (XXII)

Fasc. 3–4

SECŢIA V CONSTRUCŢII ARHITECTURĂ

1972

COLEGIUL DE REDACŢIE

Prof. em. dr. doc. GH. ALEXA, prof. em. ing. D. ATANASIU, prof. ing. C. CALISTRU, prof. ing. T. GOLGOŢIU, prof. dr. doc. D. MANGERON (secretar), conf. ing. A. MARCHIŞ, prof. dr. doc. D. RUSU, acad. prof. dr. doc. CRISTOFOR SIMIONESCU (preşedinte)

COMITETUL DE REDACŢIE AL SECŢIEI

II. CONSTRUCŢII. ARHITECTURĂ

Prof. dr. ing. C. CIOBANU
Conf. ing. VL. BOGHIAN
Prof. dr. ing. A. RADU

REDACŢIA

Prof. dr. doc. D. MANGERON (redactor responsabil)
Conf. dr. ing. HUGO ROSMAN (secretar)
Ing. ANETA BRAIER (redactor)

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tomul XVIII (XXII), Fasc. 3–4 1972

Secţia V

CONSTRUCŢII. ARHITECTURĂ

SUMAR

Pag.

DAN COŞA şi C. PAVEL, Calculul eforturilor de ordinul II al plăcilor plane cu considerarea deformabilităţii în planul mediu al plăcii şi în exteriorul acestuia (franc., rez. rom.) 9

ADRIAN VULPE, Reducerea dimensiunilor matricei geometrice şi a rigidităţii elementelor în rezolvarea structurilor spaţiale (engl., rez. rom.) 21

AURELIAN MIRON, Metodă iterativă de calcul a structurilor statice prin transmiterea rotirilor (rom., rez. rusă) 27

C. AMARIEI, O cale generală de analiză a comportării elastico-plastice a structurilor metalice plane alcătuite din bare (rom., rez. franc.) . . 33

ŞT. JERCA, Relaţii eforturi – deplasări pentru bara cu vuta dreaptă care ţin seama de influenţa forţelor axială şi tăietoare (rom., rez. franc.) 43

DAN PRECUPANU, RUDOLF MÜHLBÄCHER şi C. IONESCU, Asupra stabilităţii generale a grinzilor simplu rezemate avînd talpa inferioară fixată în planul orizontal (germ., rez. rom.) 55

AL. EFTIMIE şi VICTOR ZAVATI, Influenţa variaţiei liniare cu adîncimea a modulului de elasticitate al pămîntului asupra deplasărilor şi tasărilor sub acţiunea unei încărcări uniforme repartizate în formă de fîşie elastică (rom., rez. rusă) 61

IULIAN IONESCU, Calculul elementelor de construcţii liniare şi plane rezemate pe un semispaţiu elastic, omogen şi transversal anizotrop (franc., rez. rom.) 67

EUGEN POPA, Determinarea punctelor duble cu ajutorul calculului vectorial şi al numerelor complexe (rom., rez. franc.) 75

Pag.

TUDOR SILION, N. BOȚI și ELISABETA IVĂȘCANU, Studiul variațiilor sezoniere de volum ale stratului de fundare din lunca rîului Bahlui și influența acestora asupra comportării construcțiilor (II) 79

IOACHIM GENSEL (R. D. G.), Măsurări ultrasonice în timpul prizei mortarului de ipsos (engl., rez. rom.) 87

AURORA BORDEA, ALINA VASILIU, ANA TARHON, ELENA ȘTEFANCU și ELISABETA PĂUNEL, Studiu comparativ între compoziția chimico-mineralogică-modulară și caracteristicile fizico-mecanice și chimice ale unor cimenturi de fabricație românească (rom., rez. franc.) 91

KALIKST GRABIEC și ANTONI LACZKOWSKI (Polonia), Influența aburirii la joasă presiune asupra proprietăților fizice ale betoanelor ușoare (germ., rez. rom.) 103

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Tom XVIII (XXII), Fasc. 3—4 1972

Section V

CONSTRUCTIONS. ARCHITECTURE

CONTENTS

Pp.

DAN COŞA et C. PAVEL, Calcul des efforts de deuxième ordre des plaques planes en considérant simultanément les déformations dans le plan moyen et hors du plan moyen de la plaque (French, Romanian summary) 9

ADRIAN VULPE, The Size Reduction of Geometrical and Element Stiffness Matrices in Solving the Space Structure (English, Romanian summary) 21

AURELIAN MIRON, Méthode itérative de calcul des structures statiques par transmission des rotations (Romanian, Russian summary) . . . 27

C. AMARIEI, Une voie générale d'analyse du comportement élasto-plastique des structures métalliques planes formées de barres (Romanian, French summary) 33

ŞT. JERCA, Équations intrinsèques d'une poutre à gousset rectiligne qui tiennent compte des effets des efforts tranchant et normal (Romanian, French summary) 43

DAN PRECUPANU, RUDOLF MÜHLBÄCHER und C. IONESCU, Über das Kippen der Träger auf zwei Stützen deren Untergurt in der horizontalen Ebene befestigt ist (I) (German, Romanian summary) . . 55

AL. EFTIMIE und VICTOR ZAVATI, Einfluss der von der Tiefe abhängigen linearen Schwankung des Grund-Elastizitätsmoduls über die Verschiebungen und Setzungen unter Wirkung der durchlaufenden elastischen Gründungen (Romanian, Russian summary) 61

IULIAN IONESCU, Calcul des éléments de constructions linéaires et planes appuyées sur un demi-espace élastique, homogène et transversalement anisotrope (French, Romanian summary) 67

Pp.

EUGEN POPA, Calculs des points doubles à l'aide du calcul vectoriel et des nombres complexes (Romanian, French summary) 75

TUDOR SILION, N. BOȚI und ELISABETA IVĂȘCANU, Untersuchung von jährliche Volumenänderungen der Lagerungsschicht im Bahluiflusstal und deren Einfluss auf den Bauwerken (II) (Romanian, German summary) 79

IOACHIM GENSEL (German Democratic Republic), Ultrasonic Measuring during Setting of Gypsum Plaster (English, Romanian summary) 87

AURORA BORDEA, ALINA VASILIU, ANA TARHON, ELENA ȘTEFANCU et ELISABETA PĂUNEL, Étude comparative de la composition chimico-minéralogique modulaire et les caractéristiques physico-mécaniques et chimiques de certains ciments de fabrication roumaine (Romanian, French summary) 91

KALIKST GRABIEC und ANTONI LACZKOWSKI (Poland), Einfluss des Tiefdruckeinbrennens auf die physikalischen Eigenschaften der Leichtbetone (German, Romanian summary) 103

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
BULLETIN OF THE POLYTECHNIC INSTITUTE OF JASSY
ИЗВЕСТИЯ ЯССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
Том XVIII (XXII), вып. 3—4 1972

Секция V

СТРОИТЕЛЬСТВО. АРХИТЕКТУРА

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

ДАН КОША и К. ПАВЕЛ, Расчет второго порядка пластин с учетом деформирования в своей плоскости средней поверхности (франц., рез. рум.) 9

АДРИАН ВУЛПЕ, Сокращение размеров геометрических матриц и жесткость элементах к решений пространственных систем (англ., рез. рум.) 21

АУРЕЛЯН МИРОН, Итеративный метод для вычисления сооружений по передачи вращения (рум., рез. русск.) 27

К. АМАРИЕЙ, Обобщенный метод изучения поведения плоских стержневых металлических конструкций в упруго-пластической области (рум., рез. франц.) 33

ШТ. ЖЕРКА, Соотношения между усилиями и перемещенями для балки с прямым вутом, учитывая влияния осевых и поперечных сил (рум., рез. франц.) 43

ДАН ПРЕКУПАНУ, РУДОЛЬФ МЮЛБЕХЕР и К. ИОНЕСКУ, К общим устойчивости балок с нижним поясам связаны в горизонтальном плане (I) (нем., рез. рум.) 55

АЛ. ЕФТИМИЕ и ВИКТОР ЗАВАТИ, Влияние линейной изменчивости по глубине модуля упругости грунта на сдвиги и осадки под действием беспрерывных упругих фундаментов (рум., рез. русск.) 61

ЮЛЯН ЙОНЕСКУ, Расчет линейных и плоских элементов конструкции, лежащих на упругом, однородном и поперечно-анизотропичном полупространстве (франц., рез. рум.) 67

ЕУДЖЕН ПОПА, Расчет двойных точек с помощью векторного исчисления и комплексных чисел (рум., рез. франц.) 75

Стр.

ТУДОР СИЛИОН, Н. БОЦИ и ЕЛИСАБЕТА ИВЭШКАНУ, Изучение сезонных изменений объема фундаментного слоя из луча реки Бахлуй и влияние названных изменений на поведение построек (II) (рум., рез. нем.) 79

ЙОАГИМ ГЕНСЕЛ (Г. Д. Р.), Измерение с помощи ультразвуков во время зотровения гипсового раствора (англ., рез. рум.) 87

АУРОРА БОРДЯ, АЛИНА ВАСИЛИУ, АНА ТАРХОН, ЕЛЕНА ШТЕФАНКУ и ЕЛИСАБЕТА ПЭУНЕЛ, Сравнительное изучение химико-минералогического модулярного состава и физико-механических и химических характеристик некоторых румынских цементов (рум., рез. франц.) 91

КАЛИКСТ ГРАБЙЕК и АНТОНИ ЛАЧКОВСКИЙ (Полша), Влияние термической обработки с нижнем довлением на физические свойства легких бетонов (нем., рез. рум.) 103

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secţia V
CONSTRUCŢII. ARHITECTURĂ

C. D. 624.04

CALCUL DES EFFORTS DE DEUXIÈME ORDRE DES PLAQUES PLANES EN CONSIDÉRANT SIMULTANÉMENT LES DÉFORMATIONS DANS LE PLAN MOYEN ET HORS DU PLAN MOYEN DE LA PLAQUE

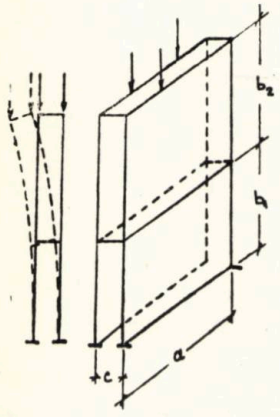
PAR

DAN COŞA et C. PAVEL

1. Introduction

L'étude de la stabilité et le calcul des efforts de II-ème ordre des plaques planes représentent des problèmes classiques du calcul, s'effectuant sur la structure déformée.

De ce qui nous savons, jusqu'à présent tout les auteurs admettent, pour la résolution des problèmes de ce genre, que les déplacements u et v, dans le plan moyen, sont négligeables par rapport à w, normale sur ce même plan, c'est-à-dire que la déformée de la plaque est suffisamment définie par sa flèche w. Si toutefois l'on tient compte de la déformabilité de la plaque dans son plan moyen, c'est seulement pour la détermination des efforts N_x, N_y, N_{xy} caractérisant le problème plan.



$c \ll (a, b_1, b_2)$

Fig. 1

Évidement il y a une large catégorie de problèmes qu'on peut résoudre assez exactement et sans trop de difficultés en admettant comme négligeables les déplacement u et v par rapport à w. Mais il y a aussi d'autres dont la résolution devient impossible si l'on néglige ces déplacements. Prenons comme exemple la structure constituée des plaques planes représentée dans la fig. 1. On ne peut pas étudier sa stabilité d'esemble sans tenir compte de la déformabilité de chaque parois dans son plan moyen.

Dans ce qui suit nous nous proposons de trouver les relations du calcul des efforts de II-ème ordre des plaques planes en renonçant à l'hypothèse où les déplacements u et v sont négligeables par rapport à w.

2. Notions préliminaires

Selon la conception preséntée dans [2] nous définissons le calcul de II-ème ordre par : a) un système primaire d'équations (par exemple celui du calcul de I-ère ordre) ; b) un système secondaire d'équations obtenu en modifiant, par rapport à un paramètre suffisament petit, le système primaire ; c) l'évaluation de la variation du I-ère ordre de la solution du système secondaire par rapport à celle du système primaire considéré comme élément de comparaison.

L'état d'effort et de déformation d'une plaque plane se définit par les trois groupes d'équations : a) d'équilibre statique, (S) ; b) de déformations (ou groupe géometrique), (G) ; c) de liaison contraintes — déformations (ou groupe physique), (F).

Chacun de ces groupes se compose, à son tour, de deux sousgroupes, caractérisant d'une part le comportement de la plaque dans son plan moyen (S_t, G_t, F_t) et d'autre part le comportement de la plaque sur la direction normale au plan moyen (S_n, G_n, F_n).

Le calcul de II-ème ordre que nous allons développer ci-dessous considère comme cause de la variation la position déformée du plan moyen, position sur laquelle les équations S_n vont être écrites.

En admettant que la plaque se trouve dans le plan xOy, les équations S_n seront :

$$(1) \qquad \sum Z = 0, \quad \sum M_{0x} = 0, \quad \sum M_{0y} = 0.$$

Au début, en raison des exigences du calcul des variations de I-ère ordre (celles d'ordre supérieur étant négligées), la cause des variations (la position sur laquelle les équations S_n s'écrivent) devra être une position voisine, indépendante de l'état d'effort, position identique du point de vue géometrique à une déformée possible quelconque de la structure (fig. 2).

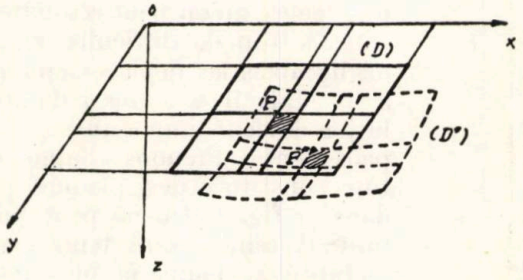


Fig. 2

En supposant connues les déplacements $u^*(x, y)$, $v^*(x, y)$ et $w^*(x, y)$ d'un point $P(x, y)$ du plan moyen de la plaque soumise à un état quelconque de contraintes, on peut déduire la déformée du plan moyen (D^*) par une trans-

formation topologique du même plan non déformé (D). Ainsi, pour un point P de (D) correspond un point P^* de (D^*) conformément à la relation :

$$P(x, y, 0) \Leftrightarrow P[x + u^*(x, y),\ y + v^*(x, y),\ w^*(x, y)]. \tag{2}$$

À certains points P_x et P_y de (D), se trouvant dans le voisinage (dx, dy) de P, correspondent, dans le plan (D^*), les points P_x^* et P_y^* (fig. 3) :

$$\begin{cases} P_x(x + dx, y, 0) \Leftrightarrow P_x^*\left(x + dx + u^* + \dfrac{\partial u^*}{\partial x}dx,\ y + v^* + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{\partial v^*}{\partial x}dx,\ w^* + \dfrac{\partial w^*}{\partial x}dx\right), \\ P_y(x, y + dy, 0) \Leftrightarrow P_y^*\left(x + u^* + \dfrac{\partial u^*}{\partial y}dy,\ y + dy + v^* + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{\partial v^*}{\partial y}dy,\ w^* + \dfrac{\partial w^*}{\partial y}dy\right). \end{cases} \tag{2'}$$

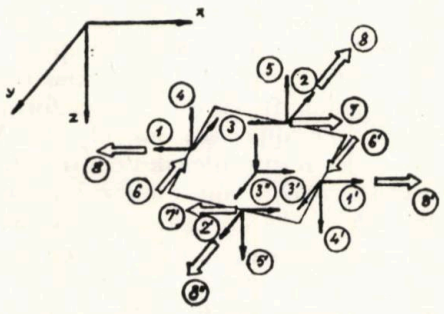


Fig. 3

Aux éléments infinitésimaux dx et dy de (D) correspondent les éléments dx^* et dy^* de (D^*) :

$$dx^* = \left(1 + \frac{\partial u^*}{\partial x}\right)dx, \qquad dy^* = \left(1 + \frac{\partial u^*}{\partial y}\right)dy.$$

Compte tenu que les contraintes de la plaque, définies symboliquement par S, doivent satisfaire à une certaine partie des équations d'équilibre écrites sur (D^*), il en résulte la nécessité que ces contraintes soient exprimées comme des fonctions du point P^* de la position voisine.

Mais si l'on tient compte de l'existence de la relation de correspondance (2) entre P^* et P, alors les contraintes sont, en effet, des fonctions composées de x et y, donc S^* est une fonction F^* (autre que F) du point P :

$$S^*(P^*) = F(P^*) = F^*(P). \tag{3}$$

Si l'on tient compte que les contraintes d'un point de la position voisine sont exprimées comme fonctions d'un point correspondant de la position initiale (D), on peut évaluer les contraintes dans le voisinage d'un point donné à l'aide des relations :

$$\begin{cases} S^*(P_x^*) = F^*(P_x) = F^*(P) + \left.\dfrac{\partial F^*}{\partial x}\right|_P \mathrm{d}x, \\ S^*(P_y^*) = F^*(P_y) = F^*(P) + \left.\dfrac{\partial F^*}{\partial y}\right|_P \mathrm{d}y. \end{cases} \tag{3'}$$

3. Équations d'équilibre

Une fois les notions préliminaires définies nous allons écrire les équations d'équilibre (1) sur la position voisine (D^*). Dans ce but nous considérons l'élément infinitesimal $\mathrm{d}x^*\mathrm{d}y^*$ de (D^*) sollicité par les efforts mis en évidence dans les séctions qui entourent cet élément et aussi par les charges extérieures, distribuées, X, Y, Z.

Nous admettons, comme hypothèse, que les charges extérieures gardent leur intensité, leur direction et leur point d'application indifféremment si elles agissent sur la position initiale, sur la position voisine où si elles accompagnent la plaque pendant sa mise en déformation.

Il est utile de préciser que : a) les efforts N_x^*, N_y^*, N_{xy}^*, V_{xz}^*, T_{yz}^*, M_x^*, M_y^*, M_{xy}^*, représentent les résultantes des contraintes de la même manière et sur les mêmes directions $xOyz$ que leurs homonymes N_x, N_y,..., M_{xy} l'étaient dans le calcul de premier ordre ; b) le calcul de II-ème ordre sur la position voisine garde la convention de signe du calcul de premier ordre des plaques.

Sur la fig. 3 sont représentés les efforts de l'élément infinitésimal de la plaque se trouvant dans la position voisine. Les efforts ont été numérotés comme suit :

1° N_x^*, $\quad 1'^\circ$ $N_x^* + \dfrac{\partial N_x^*}{\partial x}\mathrm{d}x$,

2° N_y^*, $\quad 2'^\circ$ $N_y^* + \dfrac{\partial N_y^*}{\partial y}\mathrm{d}y$,

3° $N_{xy}^* = N_{yx}^*$, $\quad 3'^\circ$ $N_{xy}^* + \dfrac{\partial N_{xy}^*}{\partial x}\mathrm{d}x$, $\quad 3''^\circ$ $N_{yx}^* + \dfrac{\partial N_{yx}^*}{\partial y}\mathrm{d}y$,

4° T_{xz}^*, $\quad 4'^\circ$ $T_{xz}^* + \dfrac{\partial T_{xz}^*}{\partial x}\mathrm{d}x$,

$5°\ T^*_{yz}$, $\qquad 5'°\ T^*_{yz} + \dfrac{\partial T^*_{yz}}{\partial y}\,dy$,

$6°\ M^*_x$, $\qquad 6'°\ M^*_x + \dfrac{\partial M^*_x}{\partial x}\,dx$,

$7°\ M^*_y$, $\qquad 7'°\ M^*_y + \dfrac{\partial M^*_y}{\partial y}\,dy$,

$8°\ M^*_{xy} = M^*_{yx}$, $\qquad 8'°\ M^*_{xy} + \dfrac{\partial M^*_{xy}}{\partial x}\,dy$, $\qquad 8''°\ M^*_{yx} + \dfrac{\partial M^*_{yx}}{\partial y}\,dy$.

La fig. 4 représente les caractéristiques géométriques de la position voisine.

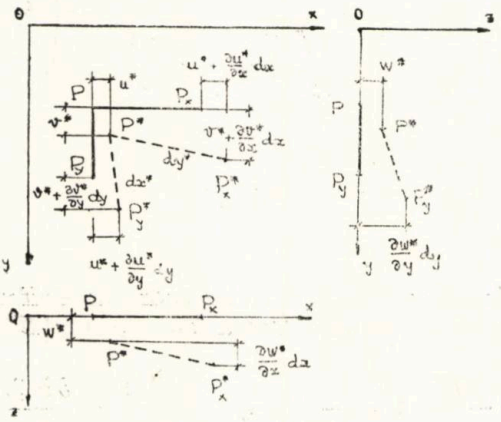


Fig. 4

L'équation $\sum M_{0y}=0$ pour les efforts de la position voisine s'établit sans difficulté si l'on examine la fig. 5 où se trouvent représentées les résultantes des contraintes qui y interviennent. Pour ne pas compliquer l'écriture de l'équation on a négligé dès le début les charges extérieures et les variations des efforts N^*_x, N^*_{yx}, T^*_{xz}, T^*_{yz}, dont la contribution à l'équation d'équilibre de moments était un infini petit d'ordre supérieur à $dx\,dy$:

$$\frac{\partial M^*_x}{\partial x}\,dx\,dy^* + \frac{\partial M^*_{yx}}{\partial y}\,dy\,dx^* - T^*_{xz}\,dy^*dx^* - T^*_{yz}\,dx^*\frac{\partial u^*}{\partial y}\,dy + \tag{4}$$

$$+N^*_x dy^*\frac{\partial w^*}{\partial x}\,dx + N^*_{yx}\,dx^*\frac{\partial w^*}{\partial y}\,dy = 0.$$

En supposant connues les valeurs des efforts qui correspondent au calcul de I-er ordre, entre ceux-ci et ceux qu'on obtient par le calcul de II-ème ordre, effectué dans la position voisine, il y a une relation de la forme :

$$S^* = S + S^{**},$$

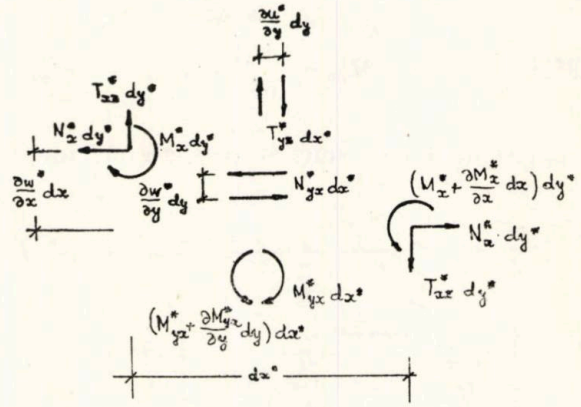


Fig. 5

où S^{**} représente la variation de premier ordre de l'effort S comme suite de la transcription des équations d'équilibre S_n sur (D^*) :

$$\left(\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_x^{**}}{\partial x}\right)\left(1+\frac{\partial v^*}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}^{**}}{\partial y}\right)\left(1+\frac{\partial u^*}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+$$

$$+(N_x+N_x^{**})\frac{\partial w^*}{\partial x}\left(1+\frac{\partial v^*}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(N_{yx}+N_{yx}^{**})\frac{\partial w^*}{\partial y}\left(1+\frac{\partial u^*}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y= \tag{4'}$$

$$=(T_{xz}+T_{xz}^{**})\left(1+\frac{\partial u^*}{\partial x}\right)\left(1+\frac{\partial v^*}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+$$

$$+(T_{yz}+T_{yz}^{**})\frac{\partial u^*}{\partial y}\left(1+\frac{\partial u^*}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Si l'on simplifie par $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, on développe les parenthèses, on néglige les variations d'ordre supérieur et l'on tient compte des équations d'équilibre correspondant au calcul de I-èr ordre, la relation (4') devient :

$$T^{**}_{xz} = \frac{\partial M^{**}_{x}}{\partial x} + \frac{\partial M^{**}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\left(\frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{\partial v^*}{\partial y}\right) + \tag{5}$$
$$+ N_x \frac{\partial w^*}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} - T_{xz} \frac{\partial u^*}{\partial x} - T_{yz} \frac{\partial u^*}{\partial y}.$$

De l'équation $\sum M_{0x} = 0$, en suivant la même voie, on obtient l'expression de la variation T^{**}_{yz}:

$$T^{**}_{yz} = \frac{\partial M^{**}_{y}}{\partial y} + \frac{\partial M^{**}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\left(\frac{\partial v^*}{\partial y} - \frac{\partial u^*}{\partial x}\right) + \tag{6}$$
$$+ N_y \frac{\partial w^*}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} - T_{xy} \frac{\partial v^*}{\partial x} - T_{xz} \frac{\partial v^*}{\partial x}.$$

Avant d'écrire l'équation $\sum Z = 0$ il est nécessaire de faire une remarque en ce qui concerne les charges extérieures. À cet égard, compte tenu que la charge distribuée est une fonction de point, si l'on passe à une position voisine son intensité se modifie. L'hypothèse suivant laquelle les charges gardent invariables leur intensité et leur direction doit être acceptée dans un certain sens, à savoir, quelque soit le contour à l'aide duquel on délimite une surface infinitésimale en (D), la charge ainsi isolée est toujours la même que celle contenue à l'intérieur de contour transformé de (D^*).

Pour le petit élément de surface $dx\,dy$ et son correspondant transformé $dx^*\,dy^*$, on aura :

$$p\,dx\,dy = p^*dx^*dy^*. \tag{7}$$

L'équation d'équilibre suivant l'axe Oz est donnée par :

$$\frac{\partial T^*_{xz}}{\partial x}\,dx\,dy^* + \frac{\partial T^*_{yz}}{\partial y}\,dy\,dx^* + Z^*dx^*\,dy^* = 0, \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T^{**}_{xz}}{\partial x}\right)\left(1 + \frac{\partial v^*}{\partial y}\right)dx\,dy + \left(\frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T^{**}_{yz}}{\partial y}\right)\left(1 + \frac{\partial u^*}{\partial x}\right)dx\,dy + Z\,dx\,dy = 0. \tag{8'}$$

Si l'on effectue les opérations en (8') on obtient :

$$\frac{\partial T^{**}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T^{**}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial x} = 0. \tag{9}$$

En éliminant T^{**}_{xz} et T^{**}_{yz} entre (5), (6) et (9) on trouve la relation :

$$\frac{\partial^2 M_x^{**}}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}^{**}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_y^{**}}{\partial y^2} + N_x\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w^*}{\partial x\,\partial y} +$$

$$+ N_y\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} - X\frac{\partial w^*}{\partial x} - Y\frac{\partial w^*}{\partial y} + \left(-\frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{\partial v^*}{\partial y}\right) -$$

(10)

$$- \frac{\partial T_{yz}}{\partial x}\cdot\frac{\partial u^*}{\partial y} - \frac{\partial T_{xz}}{\partial y}\cdot\frac{\partial v^*}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} - \frac{\partial M_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2} -$$

$$- \left(T_{yz} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u^*}{\partial x\,\partial y} - \left(T_{xz} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 v^*}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

La relation (10) représente une synthèse du groupe S_n du calcul de II-ème ordre sur la position voisine ; les groupes F_n et G_n peuvent être synthétisés à leur tour dans les relations :

(11)

$$\begin{cases} M_x^* = M_x + M_x^{**} = -D\left(\dfrac{\partial^2 w^c}{\partial x^2} + \mu\dfrac{\partial^2 w^c}{\partial y^2}\right), \\ M_y^* = M_y + M_y^{**} = -D\left(\dfrac{\partial^2 w^c}{\partial y^2} + \mu\dfrac{\partial^2 w^c}{\partial x^2}\right), \\ M_{xy}^* = M_{xy} + M_{xy}^{**} = -D(1-\mu)\dfrac{\partial^2 w^c}{\partial x\,\partial y}. \end{cases}$$

En explicitant les variations M_x^{**}, M_y^{**}, M_{xy}^{**} de (11) et en les introduisant en (10), on obtient l'équation des flèches conventionnelles w^c dans le calcul de II-éme ordre sur la position voisine.

Si les équations d'équilibre vont être écrites non pas sur la position voisine (D^*) mais sur la position déformée (D') on obtient les relations pour le calcul du II-ème ordre sur la position déformée. Dans ce cas on a

$$w^* = w^c = w', \quad u^* = u', \quad v^* = v'.$$

Par transformations élémentaires effectuées dans la relation (10) on obtient l'équation à dérivées partielles (12) dont les fonctions inconnues sont u', v', w' :

(12′) $$D\Delta\Delta w' - Z =$$

$$= N_x\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w'}{\partial x\,\partial y} + N_y\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} - X\frac{\partial w'}{\partial x} - Y\frac{\partial w'}{\partial y} -$$

(12″)

(12) $$- \frac{\partial M_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} - \frac{\partial M_y}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} - \left(T_{yz} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u'}{\partial x\,\partial y} - \left(T_{xz} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 v'}{\partial x\,\partial y} +$$

(12‴) $$+ \left(-\frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y}\right)\frac{\partial u'}{\partial x} + \left(-\frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial x}\right)\frac{\partial v'}{\partial y} - \frac{\partial T_{yz}}{\partial x}\cdot\frac{\partial u'}{\partial y} - \frac{\partial T_{xz}}{\partial y}\cdot\frac{\partial v'}{\partial x}.$$

La plaque a été considérée d'épaisseur constante.

Dans l'équation (12), le groupe (12′) considéré seul et égal à zero, représente l'équation S o p h i e G e r m a i n (c'est-à-dire la relation de calcul de premier ordre de la plaque fléchie), le groupe (12″) introduit l'effet des efforts du problème plan par les déplacements hors du plan moyen et, enfin, le groupe (12‴), l'effet des efforts de la plaque fléchie par les déplacements dans le plan moyen de la plaque.

Pour trouver les déplacements u', v', w' il est nécessaire d'ajouter à l'équation (12) encore deux autres équations correspondant à la résolution du problème plan en déplacements et qui résultent de la synthèse des groupes S_t, G_t, F_t :

$$\Delta u' + \frac{1}{1-2\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\right) + \frac{X}{G} = 0, \tag{13}$$

$$\Delta v' + \frac{1}{1-2\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\right) + \frac{Y}{G} = 0. \tag{14}$$

Le calcul des efforts de II-ème ordre d'une structure composée de plaques planes, lorsqu'on prend en considération la déformabilité totale du plan moyen (c'est-à-dire lorsqu'on ne néglige pas les déplacements u et v par raport à w), soulève, du point de vue mathématique, des problèmes particulièrement difficiles.

En admettant la possibilité de surmonter les difficultés mathématiques, la résolution du problème implique les étapes suivantes :

I. Effectuation du calcul de I-er ordre.

II. Écriture des équations (12) ... (14) pour toutes les plaques qui composent la structure.

III. Résolution du système d'équations (13) et (14) d'où l'on obtient les déplacements $u'(x, y)$ et $v'(x, y)$ dans une forme suffisamment générale et qui dépend d'un nombre de paramètres qui puissent permettre de satisfaire à toutes les conditions à la limite.

IV. Introduction des expressions générales des déplacements u' et v' dans l'équation (12) et l'obtention du déplacement $w'(x, y)$ dans sa forme générale et qui dépend encore, en dehors des paramètres spécifiques de l'équation (12), de ceux introduits par u' et v'.

Les étapes III et IV se répètent pour toutes les plaques, chacune considérée en particulier.

V. On écrit les conditions à la limite, on obtient leus valeurs des paramètres, pour aboutir, en fin de compte, aux expressions finales des efforts.

Sans essayer de résoudre effectivement les problèmes, quelques observations immédiates s'imposent.

1. Dans le cas des systèmes de plaques, le conditionnement réciproque entre u' et v' d'une part et w' d'autre part se réalise directement au moyen de l'équation (12) dans le cas ou w' est influencé par u' et v' et indirectement dans les deux sens par l'intermédiaire des conditions à la limite.

2. Si le système de plaques est sollicité par une charge de coïncidence (c'est-à-dire si pour toutes les plaques $M_x = M_y = M_{xy} = T_{xz} = T_{yz} = 0$), cas spécifique pour la perte de la stabilité par flambage, le conditionnement réciproque se réalise seulement par l'intermède des conditions à la limite.

3. Dans le cas où la structure est formée d'une seule plaque et les conditions à la limite pour le problème plan sont indépendantes de celles relatives au problème normal sur le plan moyen, le problème plan pout être résolu entièrement avant de trouver les flèches w'.

4. La stabilité d'une plaque plane ayant, pour le comportement dans le plan moyen, des conditions à la limite indépendantes de celles du comportement normal au plan, n'est pas influencée par la déformabilité de la plaque dans son plan moyen.

4. Conclusions

Dans le cadre de la définition générale, proposée en [2] et acceptée au début de cet ouvrage pour le calcul des efforts de II-ème ordre, il était également possible d'effectuer d'autres calculs suivant autres hypothèses que celle adoptée par nous, (selon laquelle les équations S_n ont été écrites sur la position déformée du plan moyen). Il n'est pas impossible que certains de ces calculs puissent embrasser d'une façon plus précise l'effet de la déformabilité de la plaque dans son plan moyen ; nous considérons, néanmoins, que celui développé par nous représente le premier pas efficient qui prenne en considération l'effet en cause.

Reçue le 1 octobre 1971

Institut de Constructions, Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. Beleş A., Voinea R., *Rezistenţa materialelor.* Ed. Tehn., Buc., 1958.
2. Coşa D., *Contribuţii la studiul stabilităţii şi calculul eforturilor de ordinul II al structurilor plane reticulare cu ajutorul metodei integrale directe aproximative.* Thèse de doctorat, Inst. de Constr., Buc., 1970.
3. Mazilu P., *Curs de stabilitatea şi dinamica construcţiilor.* Inst. de constr., Buc., 1964.
4. Ponomarev S. et collab., *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini,* (trad. de russe). Ed. Tehn., Buc., 1962.
5. Răutu R., Bergman M., *Stabilitatea statică şi dinamică a sistemelor elastice.* Ed. Tehn., Buc., 1960.
6. Scarlat S., *Stabilitatea structurilor. Probleme speciale.* Ed. Tehn., Buc., 1969.
7. Solomon L., *Elasticitatea liniară.* Ed. Acad. R. S. R., Buc., 1969.
8. Смирнов А., *Устойчивость и динамика сооружений.* М., 1959.
9. Teodorescu P. P., *Probleme plane în teoria elasticităţii.* Ed. Acad. R. P. R., Buc., 1961.
10. Timoshenko S., Gere J., *Theory of Elastic Stability.* New York, 1961.
11 *** *Сопротивление. Устойчивость. Динамика.* Т. 3, Машиностроение, М., 1968.

CALCULUL EFORTURILOR DE ORDINUL II AL PLĂCILOR PLANE, CU CONSIDERAREA DEFORMABILITĂŢII SIMULTAN, ÎN PLANUL MEDIU AL PLĂCII ŞI ÎN EXTERIORUL ACESTUIA

(Rezumat)

Se iau în considerare, în calculul eforturilor de ordinul II, pentru plăcile plane, simultan, atît deformaţiile în planul plăcii cît şi cele din exteriorul acestuia.

Pînă în prezent, în studiul stabilităţii şi în calculul de ordinul II al plăcilor se considerau neglijabile deplasările u, v din planul median în raport cu deplasarea w normală la planul median, adică se considera că deformaţia plăcii este suficient definită de săgeata w.

Luarea în consideraţie a deformabilităţii în planul său este necesară pentru determinarea eforturilor N_x, N_y, N_z, ceea ce permite rezolvarea problemelor de stabilitate a unei structuri alcătuite din plăci plane.

Se stabilesc etapele de calcul a eforturilor de ordinul II ale unei structuri constituite din plăci plane.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secţia V
CONSTRUCŢII. ARHITECTURĂ

D.C. 624.04

THE SIZE REDUCTION OF GEOMETRICAL AND ELEMENT STIFFNESS MATRICES IN SOLVING THE SPACE STRUCTURES*)

BY

ADRIAN VULPE

1. Introduction

In the matriceal solving of structures there are important — besides the size of the final system of equations — the sizes of matrices occuring in the course of calculations. Thus, the reduction of the number of element coordinates implies the reduction of the sizes of element stiffness matrix $[K_d]$ and of geometric matrix $[A]$.

2. Order Reduction of the Element Stiffness Matrix $[K_d]$

Since the matrix $[K_d]$ is quasidiagonal, the reduction of its size can be achieved by the size reduction of the stiffness matrix $[k]_i$ of each element; $[k]_i$ expresses the relationship between the displacements $\{d\}_i$ and the stresses $\{p\}_i$ (fig. 1):

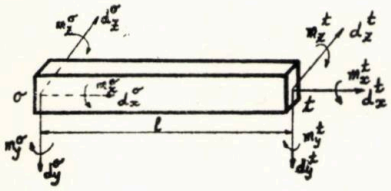


Fig. 1

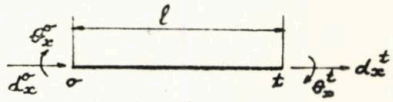


Fig. 2

*) Presented at the Scientific Session of the Polytechnic Institute of Jassy, July 2—4, 1970.

$$
(1)\quad
\begin{Bmatrix} m_x^o \\ m_x^t \\ \cdots \\ m_z^o \\ m_z^t \\ f_y^o \\ f_y^t \\ \cdots \\ f_x^o \\ f_x^t \\ \cdots \\ m_y^o \\ m_y^t \\ f_z^o \\ f_z^t \end{Bmatrix}_i
=
\left[\begin{array}{cc|cccc|cc|cccc}
\frac{GI_x}{l} & -\frac{GI_x}{l} & & & & & & & & & & \\
-\frac{GI_x}{l} & \frac{GI_x}{l} & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & \frac{4EI_z}{l} & \frac{2EI_z}{l} & \frac{6EI_z}{l^2} & -\frac{6EI_z}{l^2} & & & & & & \\
 & & \frac{2EI_z}{l} & \frac{4EI_z}{l} & \frac{6EI_z}{l^2} & -\frac{6EI_z}{l^2} & & & & & & \\
 & & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{12EI_z}{l^3} & -\frac{12EI_z}{l^3} & & & & & & \\
 & & -\frac{6EI_z}{l^2} & -\frac{6EI_z}{l^2} & -\frac{12EI_z}{l^3} & \frac{12EI_z}{l^3} & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} & & & & \\
 & & & & & & -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & \frac{4EI_y}{l} & \frac{2EI_y}{l} & -\frac{6EI_y}{l^2} & \frac{6EI_y}{l^2} \\
 & & & & & & & & \frac{2EI_y}{l} & \frac{4EI_y}{l} & -\frac{6EI_y}{l^2} & \frac{6EI_y}{l^2} \\
 & & & & & & & & -\frac{6EI_y}{l^2} & -\frac{6EI_y}{l^2} & \frac{12EI_y}{l^3} & -\frac{12EI_y}{l^3} \\
 & & & & & & & & \frac{6EI_y}{l^2} & \frac{6EI_y}{l^2} & -\frac{12EI_y}{l^3} & \frac{12EI_y}{l^3}
\end{array}\right]_i
\begin{Bmatrix} \theta_x^o \\ \theta_x^t \\ \cdots \\ \theta_z^o \\ \theta_z^t \\ d_y^o \\ d_y^t \\ \cdots \\ d_x^o \\ d_x^t \\ \cdots \\ \theta_y^o \\ \theta_y^t \\ d_z^o \\ d_z^t \end{Bmatrix}_i .
$$

$\leftarrow [k_1]_i$ $\leftarrow [k_2]_i$ $\leftarrow [k_3]_i$ $[k_4]_i \rightarrow$

Denoting

$$\bar{d}_x = d_x^t - d_x^o, \qquad \bar{\theta}_x = \theta_x^t - \theta_x^o \tag{2}$$

the matrices $[k_1]_i$ and $[k_3]_i$ become respectively :

$$[k_1]_i = \frac{GI_x}{l}, \quad [k_3]_i = \frac{EA}{l}. \tag{3}$$

The submatrix $[k_2]_i$ represents the stiffness matrix of the element, bended in the xOy plane (fig. 3 *a*).

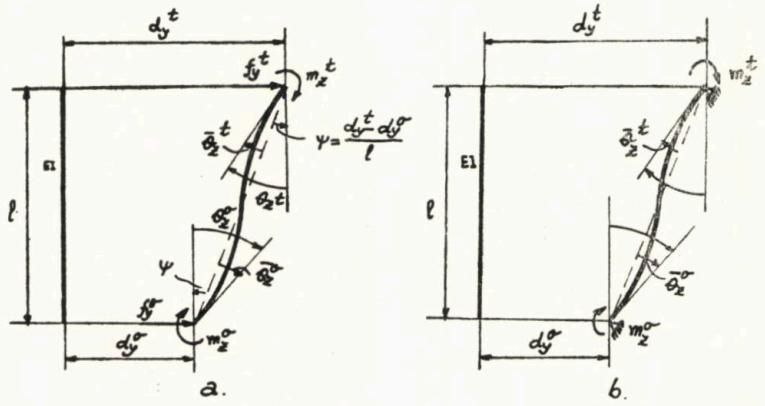


Fig. 3

The strain energy U_{2i} in this element, which is represented by its deformed configuration, equals the work carried out by the forces p_{2j} on the corresponding displacements d_{2j} :

$$U_{2i} = \frac{1}{2}\{d_2\}_i^T\{p_2\}_i = \frac{1}{2}\{d_2\}_i^T[k_2]_i\{d_2\}_i, \quad \{p_2\}_i = \begin{Bmatrix} m_z^o \\ m_z^t \\ f_y^o \\ f_y^t \end{Bmatrix}_i, \quad \{d_2\}_i = \begin{Bmatrix} \theta_z^o \\ \theta_z^t \\ d_y^o \\ d_y^t \end{Bmatrix}_i. \tag{4}$$

The same configuration can be obtained in two steps (fig. 3 *b*). In the first, the element is displaced as a rigid body from the initial position to the position indicated by the dotted line, what involves no strain energy ; in the second, the moments m_z^o and m_z^t yield, at the two end points, the rotations $\bar{\theta}_z^o$ and $\bar{\theta}_z^t$ with respect to the dotted line :

$$U_{2i} = \frac{1}{2}(m_z^o\bar{\theta}_z^o + m_z^t\bar{\theta}_z^t).$$

Therefore, the stiffness matrices $[k_2]_i$ and $[k_4]_i$ will be respectively:

$$[k_2]_i = \frac{EI_z}{l}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad [k_4]_i = \frac{EI_y}{l}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Between the relations $\overline{\theta}_z^o$, $\overline{\theta}_z^t$ and θ_z^o, θ_z^t, d_y^o, d_y^t there exist the relations (fig. 3 *b*):

$$\overline{\theta}_z^o = \theta_z^o - \psi = \theta_z^o - \frac{d_y^t - d_y^o}{l}, \quad \overline{\theta}_z^t = \theta_z^t - \psi = \theta_z^t - \frac{d_y^t - d_y^o}{l}. \tag{6}$$

The reduced stiffness matrix $[k]_i$ will be:

$$[k]_i = \begin{bmatrix} \frac{GI_x}{l} & & & & & \\ & \frac{4EI_z}{l} & \frac{2EI_z}{l} & & & \\ & \frac{2EI_z}{l} & \frac{4EI_z}{l} & & & \\ & & & \frac{EA}{l} & & \\ & & & & \frac{4EI_y}{l} & \frac{2EI_y}{l} \\ & & & & \frac{2EI_y}{l} & \frac{4EI_y}{l} \end{bmatrix}_i. \tag{7}$$

3. Size Reduction of the Passing Matrices from System Coordinates to Element Coordinates

The reduction to a half of the size of the square matrix $[K_d]$ implies the reduction to a half of the number of rows of the matrix $[A]$ and of the number of columns of the martix $[A]^T$ (fig. 4):

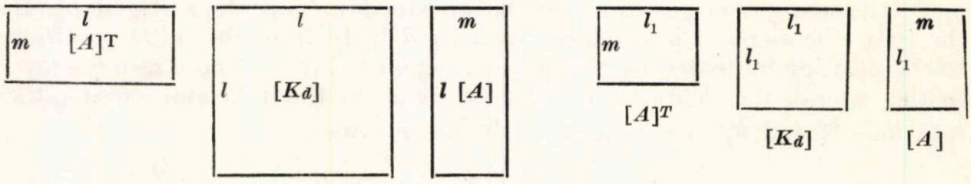


Fig. 4

In order to determine the reduced matrix $[A]$, there are expressed the six independent displacements in terms of the twelve initial ones (relations (3) and (6)), which are written in terms of the displacements and rotations $\begin{Bmatrix}\theta\\ \Delta\end{Bmatrix}_o$, $\begin{Bmatrix}\theta\\ \Delta\end{Bmatrix}_t$ of the origin, respective and joints of the i^{th} considered element :

$$(8)\qquad \begin{Bmatrix}\bar{\theta}_x^o\\ \bar{\theta}_z^o\\ \bar{\theta}_z^t\\ \bar{d}_x\\ \bar{d}_y^o\\ \bar{d}_y^t\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_{xX} & -\lambda_{xY} & -\lambda_{xZ} & 0 & 0 & 0\\ \lambda_{zX} & \lambda_{zY} & \lambda_{zZ} & \frac{\lambda_{yX}}{l} & \frac{\lambda_{yY}}{l} & \frac{\lambda_{yZ}}{l}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_{yX}}{l} & \frac{\lambda_{yY}}{l} & \frac{\lambda_{yZ}}{l}\\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_{xX} & -\lambda_{xY} & -\lambda_{xZ}\\ \lambda_{yX} & \lambda_{yY} & \lambda_{yZ} & -\frac{\lambda_{zX}}{l} & -\frac{\lambda_{zY}}{l} & -\frac{\lambda_{zZ}}{l}\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda_{zX}}{l} & -\frac{\lambda_{zY}}{l} & -\frac{\lambda_{zZ}}{l}\end{bmatrix}_o \begin{Bmatrix}\theta_X\\ \theta_Y\\ \theta_Z\\ \Delta_X\\ \Delta_Y\\ \Delta_Z\end{Bmatrix}_o +$$

$$+ \begin{bmatrix} \lambda_{xX} & \lambda_{xY} & \lambda_{xZ} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda_{yX}}{l} & -\frac{\lambda_{yY}}{l} & -\frac{\lambda_{yZ}}{l}\\ \lambda_{zX} & \lambda_{zY} & \lambda_{zZ} & -\frac{\lambda_{yX}}{l} & -\frac{\lambda_{yY}}{l} & -\frac{\lambda_{yZ}}{l}\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{xX} & \lambda_{xY} & \lambda_{xZ}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_{zX}}{l} & \frac{\lambda_{zY}}{l} & \frac{\lambda_{zZ}}{l}\\ \lambda_{yX} & \lambda_{yY} & \lambda_{yZ} & \frac{\lambda_{zX}}{l} & \frac{\lambda_{zY}}{l} & \frac{\lambda_{zZ}}{l}\end{bmatrix}_t \begin{Bmatrix}\theta_X\\ \theta_Y\\ \theta_Z\\ \Delta_X\\ \Delta_Y\\ \Delta_Z\end{Bmatrix}_t,$$

or

$$(9)\qquad = [\{p\}\bar{\lambda}_o]_i \begin{Bmatrix}\theta\\ \Delta\end{Bmatrix}_o + [\bar{\lambda}_t]_i \begin{Bmatrix}\theta\\ \Delta\end{Bmatrix}_t,$$

$(oxyz)$, $(\boldsymbol{OXYZ})_o$, $(\boldsymbol{OXYZ})_t$ being the coordinate systems of the i^{th} element, of the origin and of the termination node, respectively.

The n_{ij} element of the node indicental matrix $[N]$ gets the value $+1$, -1 or 0, according to the joint j is origin, termination or isn't incident

with the bar i. The matrix $[A]$ will be obtained from $[N]$ by replacing the $+1$ at a position (i, j) by $[\bar{\lambda}_o]_i$, and the -1 at another position (i, j) by $-[\bar{\lambda}_t]_i$, the matrices $[\bar{\lambda}_o]$ and $[\bar{\lambda}_t]$ corresponding to the bar i and joint j, respectively.

Denoting by $[N^*]$ the obtained matrix, it results :

$$[A] = [N^*]\,; \quad [A]^T = [N^*]^T.$$

In this way it is established a concrete procedure of determining the matrices $[A]$ and $[A]^T$, corresponding to the reduction of number of the element coordinates.

Received, October 2, 1971

Polytechnic Institute, Jassy,
Department of Statics and
Strength of Materials

REFERENCES

1. Rubinstein M. F., *Matrix Computer Analysis of Structures.* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. Y., 1966.
2. Klöpel K., Reuschling D., *Zur Anwendung der Theorie der Graphen bei der Matrizenformulierung statischer Probleme.* Der Stahlbau, 8 (1966).
3. Vulpe A., *Compactificarea succesivă în rezolvarea matriceală a structurilor spațiale.* Bul. Inst. polit. Iași, XVI (XX), *3—4* (1970).
4. Vulpe A., Macavei F., *Asupra rezolvării matriceale a structurilor spațiale prin metoda deformațiilor.* Bul. șt. și tehn. Inst. polit. Timișoara, *2* (1970).

REDUCEREA DIMENSIUNILOR MATRICEI GEOMETRICE ȘI A RIGIDITĂȚILOR ELEMENTELOR ÎN REZOLVAREA STRUCTURILOR SPAȚIALE

(Rezumat)

În rezolvarea matriceală a structurilor complexe pe calculatoare electronice, reducerea dimensiunilor matricelor, care intervin în decursul calculelor, este de mare importanță. Reducerea la jumătate a numărului coordonatelor elementelor — prin eliminarea dependențelor dintre acestea — implică reducerea la un sfert a numărului de elemente ale matricei rigidităților elementelor și la jumătate a numărului de linii ale matricei geometrice. Se stabilește un procedeu simplu de obținere a matricei geometrice reduse din matricea incidențelor noduri—elemente și date primare.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secţia V
CONSTRUCŢII. ARHITECTURĂ

C.Z. 624 04

METODĂ ITERATIVĂ DE CALCUL A STRUCTURILOR STATICE PRIN TRANSMITEREA ROTIRILOR

DE

AURELIAN MIRON

1. Introducere

Sistemele de ecuaţii care intervin în practica proiectării la calculul cadrelor multiple se rezolvă, în prezent, prin iteraţie. În cele ce urmează se expune un procedeu simplificat de calcul iterativ al transmiterii rotirilor şi care nu mai necesită calculul pe schemă al structurii. Metoda se bazează pe o formulă generală de calcul a rotirii nodurilor şi a fost dedusă prin iterarea ecuaţiilor de condiţie aplicată la un cadru multiplu.

2. Formule generale

În metodele generale de calcul ale structurilor static nedeterminate intervin ecuaţii liniare în număr egal cu numărul necunoscutelor. Se va considera procedeul de rezolvare prin iteraţie a sistemului din cazul transmiterii rotirilor, sistem care se deduce din ecuaţiile de condiţie ce apar în metoda deplasărilor pentru cadre cu noduri fixe.

În lucrarea [2] (cap. **IX**, Utilizarea rezolvării prin iteraţie în metoda deplasărilor, pct. **2**, Procedeul transmiterii rotirilor) s-a stabilit formula generală a ecuaţiei de condiţie pentru un nod oarecare j :

$$r_{j1}\,\theta_1 + r_{j2}\,\theta_2 + \cdots + r_{jj}\,\theta_j + \cdots + r_{jn}\,\theta_n + R_{js} = 0. \tag{2.1}$$

Necunoscuta principală (θ_j) se calculează din :

$$\theta_j = -\frac{R_{js}}{r_{jj}} - \frac{r_{j1}}{r_{jj}}\,\theta_1 - \frac{r_{j2}}{r_{jj}}\,\theta_2 - \cdots - \frac{r_{jn}}{r_{jj}}, \tag{2.2}$$

unde

$$-\frac{R_{js}}{r_{jj}} = \frac{\overline{M}_j}{4EK_j} = \theta_j^0\,, \quad -\frac{r_{jk}}{r_{jj}} = \rho_{k-j}$$

și unde θ_j^0 este valoarea inițială a rotirii din nodul j iar ρ_{k-j} este un coeficient de transmitere a rotirii de la nodul k la nodul j.

Modul de rezolvare prin iterație directă a ecuațiilor de condiție, a unui cadru multiplu acționat de sarcini simetrice, prin procedeul transmiterii rotirilor și pe baza căruia a fost dedusă formula generală, este ilustrat în exemplul reprezentat în fig. 1.

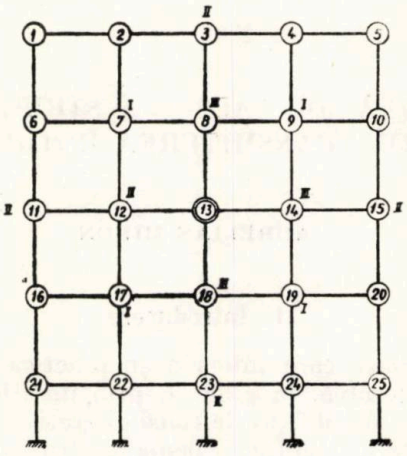


Fig. 1

În baza formulei generale (2.1) pentru cadrul din fig. 1 se pot scrie ecuațiile:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} r_{1-1} X_1 + r_{2-1} X_2 + r_{6-1} X_6 - M_1 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{20-25} X_{20} + r_{24-25} X_{24} + r_{25-25} X_{25} - M_{25} = 0. \end{cases}$$

Pentru rezolvarea prin iterație, prima ecuație din (I), pe baza formulei (2.2), se poate scrie sub forma:

$$X_1 = \frac{\overline{M}_1}{r_{1-1}} + \frac{r_{2-1} X_2}{r_{1-1}} - \frac{r_{2-1} X_6}{r_{1-1}}. \tag{2.3}$$

Forme analoge capătă și restul ecuațiilor. În rapoartele care apar se introduc notații de forma:

$$X_1^0 = \frac{\overline{M}_1}{r_{1-1}}, \qquad \rho_{1-2} = \frac{r_{2-1}}{r_{1-1}},$$

unde X_1^0 reprezintă valoarea inițială a necunoscutei, iar ρ_{1-2} este denumit factor sau coeficient de transmitere.

Introducînd aceste notații în sistemele de ecuații din (I) și considerînd că transmiterile se fac de la nodurile numerotate impar la nodurile numerotate par, rezultă :

Treapta I

$$\begin{cases} X_1^{(1)} = X_1^0 + \rho_{1-2}\, X_2^0 + \rho_{1-6}\, X_6^0, \\ X_2^{(1)} = X_2^0 + \rho_{2-1}\, X_1^{(1)} + \rho_{2-3}\, X_{31} + \rho_{2-7}\, X_7^{(1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{24}^{(1)} = X_{24}^0 + \rho_{24-19}\, X_{13}^{(1)} + \rho_{24-23}\, X_{23}^{(1)} + \rho_{24-25}\, X_{25}^{(1)}, \\ X_{25}^{(1)} = X_{25}^0 + \rho_{25-20}\, X_{20}^0 + \rho_{25-24}\, X_{24}^0. \end{cases}$$

Treapta II

$$\begin{cases} X_1^{(2)} = \rho_{1-2}\, \Delta_2^{(1)} + \rho_{1-6}\, \Delta_6^{(1)}, \\ X_2^{(2)} = \rho_{2-1}\, X_1^{(2)} + \rho_{2-3}\, X_3^{(2)} + \rho_{2-7}\, X_7^{(2)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{24}^{(2)} = \rho_{24-19}\, X_{19}^{(2)} + \rho_{24-23}\, X_{23}^{(2)} + \rho_{24-25}\, X_{25}^{(2)} \\ X_{25}^{(2)} = \rho_{25-20}\, \Delta_{20}^{(1)} + \rho_{25-24}\, \Delta_{24}^{(1)}. \end{cases}$$

Se introduc notațiile :

$$X_1^{(1)} = \alpha_1, \quad X_3^{(1)} = \alpha_3, \dots, X_{25}^{(1)} = \alpha_{25}, \tag{2.4}$$

$$\Delta_2^{(1)} = \alpha_1\rho_{2-1} + \alpha_3\rho_{2-3} + \alpha_7\rho_{2-7}. \tag{2.5}$$

Dacă se urmărește determinarea uneia dintre necunoscutele sistemului de exemplu $X_{13}^{(a)}$, aceasta va rezulta prin adunarea termenilor șirului din treptele I și II :

$$\begin{aligned} X_{13}^{(a)} = {} & X_{13}^0 + \rho_{13-8}\, X_8^0 + \rho_{13-12}\, X_{12}^0 + \rho_{13-14}\, X_{14}^0 + \rho_{13-18}\, X_{18}^0 + \\ & + \rho_{13-8}\, \Delta_8^{(1)} + \rho_{13-12}\, \Delta_{12}^{(1)} + \rho_{13-14}\, \Delta_{14}^{(1)} + \rho_{13-18}\, \Delta_{18}^{(1)}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ținînd seama de notațiile (2.4), (2.5), sistemul (2.6) devine :

$$\begin{aligned} X_{13}^{(a)} = {} & \alpha_{13} + \rho_{13-8}\,(\rho_{8-3}\,\alpha_3 + \rho_{8-7}\,\alpha_7 + \rho_{8-9}\,\alpha_9 + \rho_{8-13}\,\alpha_{13}) + \\ & + \rho_{13-12}\,(\rho_{12-9}\,\alpha_7 + \rho_{12-11}\,\alpha_{11} + \rho_{12-17}\,\alpha_{17} + \rho_{12-13}\,\alpha_{13}) + \\ & + \rho_{13-14}\,(\rho_{14-13}\,\alpha_{13} + \rho_{14-15}\,\alpha_{15} + \rho_{14-19}\,\alpha_{19}) + \rho_{13-18}\,(\rho_{18-13}\,\alpha_{13} + \\ & + \rho_{18-17}\,\alpha_{17} + \rho_{18-19}\,\alpha_{19} + \rho_{18-23}\,\alpha_{23}). \end{aligned} \tag{2.7}$$

În baza relațiilor (2.1), (2.2) rezultă :

$$X_{13}^{(a)} = \theta_{13}^{(a)}, \tag{2.8}$$

$$\beta_{13-8} = \rho_{13-8}\,\rho_{8-13}. \tag{2.9}$$

Ultima egalitate poate fi privită ca produsul unor coeficienți de transmitere dus — întors, între nodul care urmează a fi determinat și nodurile de tipul III (fig. 1). De asemenea :

$$\gamma_{13-7} = \rho_{13-8}\,\rho_{8-7} + \rho_{13-12}\,\rho_{12-7} \tag{2.10}$$

reprezintă suma produselor coeficienților de transmitere de la nodul care urmează a fi determinat, la nodul de tip I (fig. 1) și care nu este legat direct cu bară de acesta. În sfîrșit

$$\varphi_{13-3} = \rho_{1-38}\,\rho_{8-3} \tag{2.11}$$

constituie, evident, produsul coeficienților de transmitere de la nodul care urmează a fi determinat la nodul de tip II (fig. 1).

Introducînd (2.8) ... (2.11) în (2.7) se obține :

$$\begin{aligned}\theta_{13}^{(a)} = {} & \alpha_{13}\,(1 + \beta_{13-8} + \beta_{13-14} + \beta_{13-18} + \beta_{13-12}) + \alpha_7\,\gamma_{13-7} + \\ & + \alpha_9\,\gamma_{13-9} + \alpha_{17}\,\gamma_{13-17} + \alpha_{19}\,\gamma_{13-19} + \alpha_3\,\varphi_{13-3} + \alpha_{11}\,\varphi_{13-11} + \\ & + \alpha_{15}\,\varphi_{13-15} + \alpha_{23}\,\varphi_{13-23}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Relația (2.12) constituie *formula generală* care permite determinarea necunoscutei $\theta_{13}^{(a)}$. Rezultă de aici că necunoscuta $\theta_n^{(a)}$ a unui sistem de forma (I) se deduce prin adunarea termenilor șirului dintr-un nod generic, din nodurile de tip I și II, înmulțite cu coeficienții $1 + \beta_{k-i}$, γ_{k-v} și φ_{k-w}.

Este ușor de văzut că formula (2.12) are un caracter general. De exemplu, necunoscutele $\theta_1^{(a)}$, $\theta_{17}^{(a)}$ se pot stabili cu relațiile :

$$\theta_1^{(a)} = \alpha_1\,(1 + \beta_{1-2} + \beta_{1-3}) + \alpha_7\,\gamma_{1-7} + \alpha_3\,\varphi_{1-3} + \alpha_{11}\,\varphi_{1-11}, \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}\theta_{17}^{(a)} = {} & \alpha_{17}\,(1 + \beta_{17-12} + \beta_{17-18} + \beta_{17-22} + \beta_{17-16}) + \alpha_{11}\,\gamma_{17-11} + \\ & + \alpha_{13}\,\gamma_{17-13} + \alpha_{21}\,\gamma_{17-21} + \alpha_{23}\,\gamma_{17-23} + \alpha_7\,\varphi_{17-7} + \alpha_{19}\,\varphi_{17-19}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Celelalte necunoscute finale, cu indici pari, ale sistemului, $\theta_2, \theta_4, \ldots$, se determină cu relațiile curente :

$$\theta_2 = \theta_2^0 + \rho_{2-1}\,\theta_1^{(a)} + \rho_{2-3}\,\theta_3^{(a)} + \rho_{2-7}\,\theta_7^{(a)}, \tag{2.15}$$

$$\theta_4 = \theta_4^{(0)} + \rho_{4-3}\,\theta_3^{(a)} + \rho_{4-5}\,\theta_5^{(a)} + \rho_{4-9}\,\theta_9^{(a)}, \ldots \tag{2.16}$$

Odată calculate valorile finale ale rotirilor nodurilor pare din fig. 1, se calculează valorile finale ale rotirilor nodurilor impare, cu relații de tipul (2.15) și (2.16), anume :

$$\theta_1 = \theta_1^0 + \theta_2\,\rho_{1-2} + \theta_6\,\rho_{1-6}, \tag{2.17}$$

. . . . . .

$$\theta_{17} = \theta_{17}^0 + \theta_{12}\,\rho_{17-12} + \theta_{18}\,\rho_{17-18} + \theta_{16}\,\rho_{17-16} + \theta_{22}\,\rho_{17-22}, \tag{2.18}$$

. . . . . .

Pentru ca valorile necunoscutelor date de formulele (2.12) ... (2.18) să fie determinate cu o aproximație sub 2%, este necesar să se respecte următoarele indicații :

a) Formula (2.12) se aplică nodurilor (aflate pe diagonală în ambele sensuri ale structurii) care au valorile inițiale ale unghiurilor de rotire cele mai mici, iar relația (2.15) se aplică la nodurile cu valori inițiale ale unghiurilor de rotire cele mai mari :

$$\theta_j^0 = -\frac{R_{js}}{r_{jj}} = \frac{\overline{M}_j}{4\sum K_j}. \tag{2.19}$$

b) La sfîrșitul calculului, trecerea de la rotiri la momente se efectuează cu ajutorul formulei stabilite în [1] :

$$M_{j-l}^{(j)} = -4K_{j-l}^{(j)}\left(\theta_j + \frac{1}{2}\theta_l\right) + M_j. \tag{2.20}$$

3. Exemplu de calcul

În exemplul de calcul ce urmează se prezintă modul de aplicare a formulelor stabilite, comparînd rezultatele astfel obținute cu cele determinate prin metodele de calcul cunoscute.

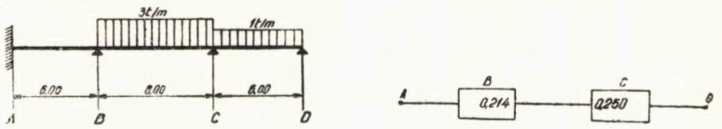


Fig. 2

Se rezolvă prin metoda iterativă propusă grinda continuă reprezentată în fig. 2 și calculată prin metoda transmiterii rotirilor. Schema, încărcările, momentele de încastrare, valorile inițiale ale rotirilor precum și coeficienții de transmitere, au fost preluate din [1], exemplul 13, p. 143.

Etapele calculului după metoda propusă

$\overline{M}_{B-C}^{B} = +16\,000$ kgm, $\overline{M}_{B-C}^{C} = -16\,000$ kgm, $M_{C-D}^{C} = 4\,500$ kgm, $\theta_B^0 = +13\,672$, $\theta_C^0 = -11\,500$. Conform relației (2.9), $\beta_{B-C} = 0{,}214 \cdot 0{,}250 = 0{,}0535$, iar în baza relației (2.4), $\alpha_C = \theta_C^0 + \theta_B^0 \rho_{C-B} = -11\,500 - 13\,672 \cdot 0{,}25 = -14\,918$. Relația (2.12) conduce la $\theta_c^{(a)} = \alpha_C(1 + \beta_{C-B}) = -14\,918\ (1 + 0{,}0535) = -15\,716$; în conformitate cu (2.15), $\theta_B = \theta_B^0 + \theta_c^{(a)} \rho_{B-C} = +13\,672 + 15\,716 \cdot 0{,}214 = 17\,037$. În sfîrșit, ținînd seama de (2.17) $\theta_C = \theta_C^0 + \theta_B \rho_{C-B} = -11\,500 - 13\,672 \cdot 0{,}250 = -15\,759$, $M_{B-C}^{(B)} = -4 \cdot 0{,}125 \times$ $\times (17\,037 - \frac{1}{2}\,15\,759) + 16\,000 = 11\,420$ (11 400), $M_{A-B}^{(B)} = -4 \cdot 0{,}167 \cdot 17\,037 =$

$= -11\,400\,(-11\,400)$, $M^{(C)}_{B-C} = -4 \cdot 0{,}125\,(-15\,759 + \frac{1}{2}\,17\,037) - 16\,000 = -12\,380$, $(-12\,380,)\; M^{(C)}_{C-D} = -4 \cdot 0{,}125\,(-15\,759) + 4\,500 = +12\,380\,(+12\,380)$.

Momentele la capetele barelor se determină cu relația (2.20).

În paranteză sînt trecute rezultatele din [1], diferențele care apar fiind mici, sub $2\,^0/_{00}$.

4. Concluzii

Procedeul de calcul iterativ al transmiterii rotirilor a permis reținerea următoarelor concluzii:

a) Calculul transmiterii rotirilor este sensibil simplificat. În locul sistemului de ecuații care trebuie luat în discuție este suficient să se considere formula generală (2.12) care permite calculul rotirii nodurilor.

b) Formula (2.12) are la bază un procedeu de iterare a ecuațiilor de condiții, aplicat la un cadru multiplu, pînă cînd corecțiile transmise sînt mai mici decît aproximația impusă.

c) Formula propusă conduce la rezolvarea directă, independent de schemă, a calculului și, în consecință, programarea mașini de calcul este simțitor facilitată.

Rezultatele care se obțin verifică principiile statice și sînt comparabile cu cele stabilite prin metode cunoscute. Diferențele care apar sînt relativ mici, acceptabile în calcule tehnice.

Primită la 17 octombrie 1972

IPROSIN, filiala Iași

BIBLIOGRAFIE

1. Agent R., *Metoda aproximațiilor succesive*. Buc., 1955.
2. Gheorghiu Al., *Statica construcțiilor*. Vol. II, Buc., 1965.
3. Mazilu P., *Calculul cadrelor . Deplasări de lucru mecanic virtual în metoda Cross*. Buc., 1946.
4. Șesan A., Orlovschi N., *Variante și simplificări ale metodei distribuției momentelor*. Teoria și Practica Constr., *1* (1954).
5. Zacopceanu A., *Metoda Cross*. Buc., 1947.

ИТЕРАТИВНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ВЫЧИСЛЕПИЯ СООРУЖЕНИЙ ПО ПЕРЕДАЧИ ВРАЩЕНИЯ

(Резюме)

Предлагается метод являющийся простым способом для итеративного вычисления передачи вращения. Этот метод употребляется при вычислении рам с неподвижными узлами. Получается общая формула (2.12) которая дает возможность вычислять вращения каждого узла.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secţia V
CONSTRUCŢII. ARHITECTURĂ

C. Z. 624.04 ; 624.01

O CALE GENERALĂ DE ANALIZĂ A COMPORTĂRII ELASTICO-PLASTICE A STRUCTURILOR METALICE PLANE ALCĂTUITE DIN BARE

DE

C. AMARIEI

1. Introducere

Studiul comportării structurilor în domeniul elastico-plastic se referă la următoarele două aspecte importante :

1. Determinarea stării de cedare, ca mecanism, valori ale parametrilor de încărcare şi mărimi ale deplasărilor maxime. Pentru acest scop se folosesc metodele cunoscute de calcul în domeniul plastic, dintre care metoda combinării mecanismelor elementare [1], [2], ca metodă cinematică, şi metoda inegalităţilor [3], [4], ca metodă statică, sînt cele cu aplicabilitatea cea mai mare.

2. Cunoaşterea comportării structurii în cadrul intervalului de adaptare statică pînă la cedare, adică a „evoluţiei" structurii supusă unor încărcări (sau încărcări—descărcări—reîncărcări) progresive, pentru a stabili : ordinea de apariţie a articulaţiilor plastice, distribuţiile de eforturi şi mărimile deplasărilor corespunzătoare formării fiecărei articulaţii plastice, mărimea intervalului dintre articulaţiile plastice succesive (ca parametri de încărcare şi deplasări), modificările produse în cadrul intervalului de adaptare statică de către stările de autotensiuni rezultate din încărcări peste limita elastică, urmate de descărcări şi reîncărcări (cazul sarcinilor variabile).

O astfel de analiză completă impune utilizarea unor procedee de calcul „biografic", în care scop se pot adapta corespunzător metodele de calcul în domeniul elastic, în condiţiile adoptării unor ipoteze mai mult sau mai puţin restrictive, care se referă în special la caracteristicile materialului din care se realizează structura, caracterul articulaţiilor plastice, comportarea structurii în intervalul dintre două articulaţii plastice succesive, ponderea influenţei anumitor factori asupra momentelor capabile ale secţiunilor critice.

Dacă se admite valabilitatea ipotezelor teoriei plastice simple, adaptarea metodelor de calcul ale staticii liniare constă în utilizarea unui procedeu de rezolvare în etape succesive, considerînd o variaţie progresivă a parametrului (unic) de încărcare.

Dintre metodele propuse în literatura de specialitate şi care urmează această cale, conducînd la o analiză mai mult sau mai puţin completă a comportării elastico-plastice, cele mai importante sînt cele indicate de colectivul condus de prof. em. ing. A. Gheorghiu de la Institutul de construcţii, Bucureşti [5], [6], regretatul prof. M. Hangan [7], J. M. English [8], U. Fuxa [9], P. Pozzati [10], R. J. Alvarez şi Ch. Birnstiel [11], C. K. Wang [12]. Mai citǎm de asemenea metodele de calcul

în domeniul plastic pentru structuri acţionate dinamic şi care pot fi adaptate pentru un calcul în etape succesive la acţiuni statice progresive, ca, de exemplu, cea indicată de A. C. Heidebrecht [13] sau R. W. Clough [14].

Avînd în vedere necesitatea unei analize complete a comportării elastico-plastice, impusă de existenţa, în anumite structuri, a unor forţe axiale mari, de acţiunea unor sarcini variabile, precum şi de obligativitatea evaluării în fiecare etapă a mărimii deplasărilor şi a verificării respectării condiţiilor de curgere plastică — ceea ce reclamă cunoaşterea distribuţiilor de eforturi — în lucrarea de faţă se prezintă o cale generală de abordare a acestei analize, care permite satisfacerea dezideratelor de mai sus şi care este aplicabilă în cazul utilizării în fiecare etapă a oricărei metode de calcul pentru determinarea distribuţiilor de eforturi.

Se presupun valabile ipotezele teoriei plastice simple, cu o serie de amendamente care se vor indica în cuprinsul lucrării.

2. Operaţii principale de calcul

Indiferent de metoda de calcul elastic aleasă pentru stabilirea distribuţiilor de eforturi, operaţiile generale care trebuie efectuate într-o etapă oarecare (k), în care urmează să se formeze o articulaţie plastică, sînt următoarele :

1. Determinarea valorii momentelor $\{\Delta M_{ij}^{(k)}\}$ din secţiunile critice, pentru o variaţie arbitară $\lambda_a^{(k)}$ a factorului de încărcare.

2. Calculul valorilor momentelor sumate cu momentele din etapa $(k-1)$:

$$\{\overline{M}_{ij}^{(k)}\} = \{M_{ij}^{(k-1)}\} + \{\Delta M_{ij}^{(k)}\}. \tag{1}$$

3. Determinarea diferenţelor dintre momentele capabile (plastice) $\{M_{ij(k)}^{(p)}\}$ şi momentele sumate :

$$\{M_{ij}^{*(k)}\} = \{M_{ij(k)}^{(p)}\} - \{\overline{M}_{ij}^{(k)}\}. \tag{2}$$

Afectarea momentelor plastice ale secţiunilor critice cu indicele k al etapei de calcul, semnifică faptul că se poate ţine cont de influenţa unor anumiţi factori (forţe tăietoare, forţe axiale) asupra acestor momente, ceea ce le modifică valorile de la o etapă la alta, pe măsura variaţiei mărimii factorilor respectivi [15].

4. Calculul coeficienţilor de multiplicare a factorului de încărcare, corespunzători fiecărei secţiuni critice :

$$\alpha_{ij}^{(k)} = \frac{M_{ij}^{*(k)}}{\Delta M_{ij}^{(k)}}. \tag{3}$$

5. Stabilirea secţiunii în care se formează articulaţia plastică (k) şi a coeficientului corespunzător de multiplicare a factorului de încărcare, pe baza criteriului :

(4) $$\alpha_k = \min\ [\pm\ \alpha_{ij}^{(k)}].$$

6. Determinarea valorii factorului de încărcare la care se formează articulația plastică (k):

(5) $$\lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)} + \lambda_a^{(k)}\ (1 \pm \alpha_k).$$

7. Determinarea distribuției de momente corespunzătoare factorului de încărcare $\lambda^{(k)}$:

(6) $$\{M_{ij}^{(k)}\} = \{\overline{M}_{ij}^{(k)}\} \pm \alpha_k\ \{\Delta M_{ij}^{(k)}\}.$$

8. Calculul deformațiilor (deplasări și rotiri) din etapa (k) și cumularea lor cu cele din etapa $(k-1)$.

9. Verificarea condițiilor de curgere plastică:

(7) $$\{-M_{ij(k)}^{(p)}\} \leqslant \{M_{ij}^{(k)}\} \leqslant \{+M_{ij(k)}^{(p)}\}$$

și a compatibilității deformațiilor:

(8) $$\delta_{ij}^{(k)} \leqslant \delta_{ij}^{adm}, \qquad \theta_{ij}^{(k)} \leqslant \theta_{ij}^{adm}.$$

3. Calculul la sarcini variabile

Pentru studiul comportării structurilor supuse acțiunii unor sarcini variabile ca mărime și sens, calculul se efectuează după cum urmează

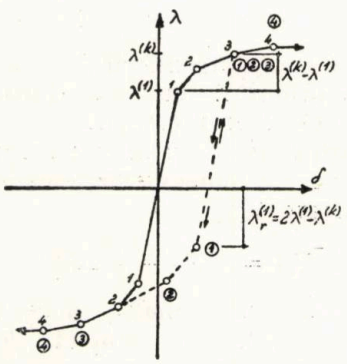


Fig. 1. — Descărcare de la o articulație plastică.

a) Dacă are loc o descărcare completă de la o valoare $\lambda^{(k)}$ a factorului de încărcare corespunzătoare formării unei articulații plastice, valoare pentru care se cunoaște deci distribuția de momente $\{M_{ij}^{(k)}\}$ (fig. 1), calculul se conduce în felul următor :

α) se determină distribuţia teoretică a momentelor de descărcare:

$$\{M_{ij}^{(d)}\} = \frac{\lambda^{(k)}}{\lambda^{(1)}} \{M_{ij}^{(1)}\}, \tag{9}$$

unde $\lambda^{(1)}$ şi $\{M_{ij}^{(1)}\}$ reprezintă factorul de încărcare şi respectiv momentele din distribuţia corespunzătoare formării primei articulaţii plastice la prima încărcare (structura complet elastică);

β) se determină distribuţia de momente remanente:

$$\{m_{ij}\} = \{M_{ij}^{(k)}\} - \{M_{ij}^{(d)}\}. \tag{10}$$

La o reîncărcare în acelaşi sens va rezulta o comportare elastică pînă la valoarea $\lambda^{(k)}$ a factorului de încărcare, la care se vor forma simultan toate articulaţiile (1),...,(k) inclusiv, în continuare comportarea structurii fiind similară celei de la încărcarea precedentă. Are loc deci o creştere a limitei de comportare elastică cu mărimea $\lambda^{(k)} - \lambda^{(1)}$, domeniul de comportare elastică relativ la încărcări devenind:

$$\lambda_r^{(1)} = \lambda^{(1)} + (\lambda^{(k)} - \lambda^{(1)}) = \lambda^{(k)}, \tag{11}$$

unde $\lambda_r^{(1)}$ reprezintă factorul de încărcare corespunzător formării primei articulaţii plastice la reîncărcarea în acelaşi sens, iar $\lambda^{(1)}$ şi $\lambda^{(k)}$ au semnificaţiile indicate anterior.

Dacă are loc o reîncărcare în sens invers, structura se va comporta elastic pînă la o valoare a factorului de încărcare egală cu:

$$\lambda_r^{(1)} = \lambda^{(1)} - (\lambda^{(k)} - \lambda^{(1)}) = 2\lambda^{(1)} - \lambda^{(k)}. \tag{12}$$

În continuare structura se comportă diferit faţă de încărcarea precedentă, pînă la valoarea $\lambda^{(k)}$ a factorului de încărcare, după care are loc o comportare identică cu cea din încărcarea precedentă.

În ambele cazuri distribuţia de momente sumate pentru prima etapă se determină prin suprapunerea momentelor remanente cu cele produse de factorul arbitrar de încărcare $\lambda_a^{(1)}$:

$$\{\overline{M}_{ij}^{(1)}\} = \{m_{ij}\} \pm \{\Delta M_{ij}^{(1)}\}, \tag{13}$$

în continuare calculul efectuîndu-se analog ca pentru prima încărcare.

b) Dacă se produce o descărcare completă de la o valoare oarecare $\lambda^{(k)}$ a factorului de încărcare care nu corespunde formării unei articulaţii plastice (fig. 2), calculul comportă ca etapă suplimentară determinarea distribuţiei de momente corespunzătoare factorului de încărcare $\lambda^{(k)}$:

$$\{M_{ij}^{(k)}\} = \{M_{ij}^{(a)}\} + n_k \{\Delta M_{ij}^{(p)}\}, \tag{14}$$

unde: $\{M_{ij}^{(a)}\}$ — momente din distribuţia corespunzătoare formării articulaţiei plastice care precede factorul de încărcare $\lambda^{(k)}$, la încărcarea precedentă; $\{\Delta M^{(p)}_{ij}\}$ — momente din distribuţia corespunzătoare factorului de încăr-

care arbitrar din etapa de determinare a articulaţiei plastice care urmează factorului de încărcare $\lambda^{(k)}$ de la care se produce descărcarea, la încărcarea precedentă ; n_k se determină cu relaţia :

$$n_k = \frac{\lambda^{(k)} - \lambda^{(a)}}{\lambda_a^{(p)}}, \tag{15}$$

în care : $\lambda^{(a)}$ — factorul de încărcare corespunzător formării articulaţiei plastice care precede pe $\lambda^{(k)}$ în încărcarea precedentă ; $\lambda_a^{(p)}$ — factorul de încărcare arbitrar din etapa de determinare a formării articulaţiei plastice care urmează după factorul de încărcare $\lambda^{(k)}$ în încărcarea precedentă.

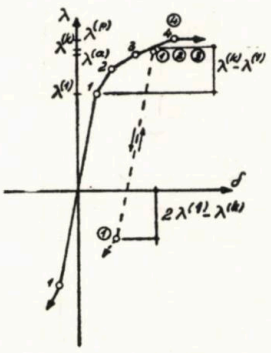


Fig. 2. — Descărcare dintr-un punct oarecare.

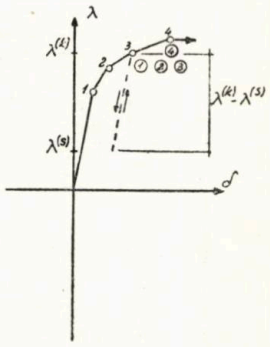


Fig. 3. — Descărcare parţială.

În rest, calculul se conduce analog ca în cazul descărcării de la o valoare a factorului de încărcare care corespunde unei articulaţii plastice.

În acest caz, la o reîncărcare în acelaşi sens, structura se va comporta elastic pînă la factorul de încărcare $\lambda^{(k)}$ de la care s-a produs descărcarea, cînd se vor forma simultan toate articulaţiile plastice care la încărcarea precedentă apăreau pînă la valoarea $\lambda^{(a)}$ a factorului de încărcare, în continuare comportarea fiind neschimbată ; la o reîncărcare în sens invers are loc o micşorare a intervalului de comportare elastică, acesta devenind :

$$\lambda_r^{(1)} = 2\lambda^{(1)} - \lambda^{(k)}. \tag{16}$$

c) În cazul unei descărcări parţiale de la $\lambda^{(k)}$ pînă la $\lambda^{(s)}$ (fig. 3), determinarea distribuţiei de momente teoretice de descărcare are loc pe baza relaţiei :

$$\{M_{ij}^{(d)}\} = \frac{\lambda^{(k)} - \lambda^{(s)}}{\lambda_a^{(1)}} \{\Delta M_{ij}^{(1)}\}. \tag{17}$$

Mărimile care intervin în relaţia (17) au semnificaţiile indicate anterior.

În rest, calculul se conduce la fel ca în cazurile precedente.

În efectuarea analizei elastico-plastice, pe calea prezentată, trebuie avute în vedere cîteva observaţii şi anume :

a) Variaţia arbitrară $\lambda_a^{(k)}$ a factorului de încărcare, în fiecare etapă, este bine să fie aleasă ca o fracţiune din valoarea factorului de încărcare

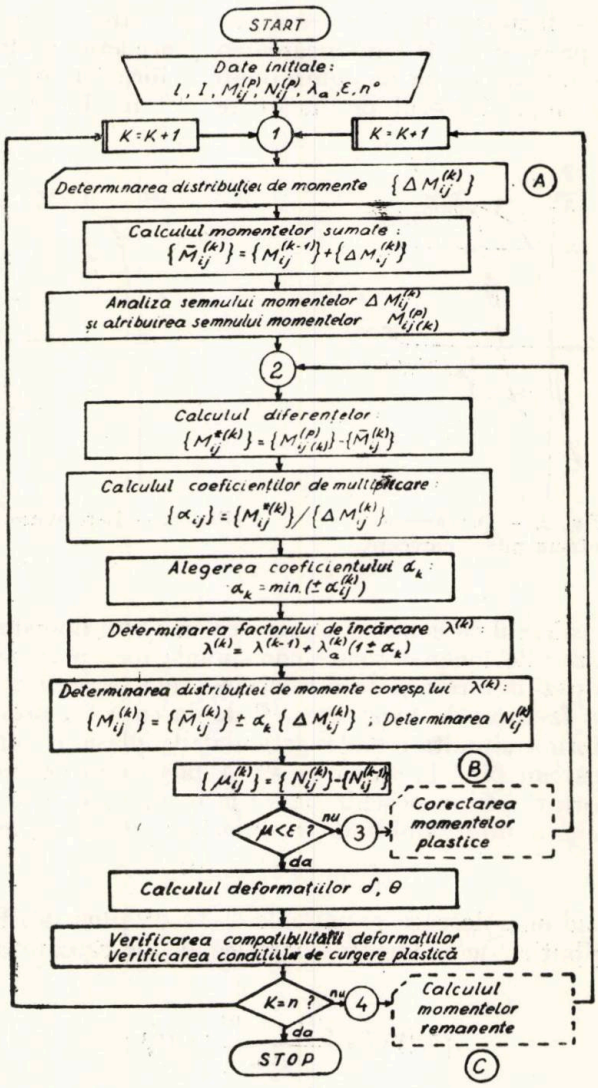


Fig. 4. — Schema operaţiilor de calcul.

la cedare, aceasta din urmă fiind determinată fie exact, fie pe un mecanism aproximativ de cedare ; alegerea întîmplătoare a acestei variații se poate răsfrînge negativ asupra preciziei calculului.

b) La determinarea diferențelor $\{M^{*(k)}_{ij}\}$, momentelor plastice $\{M^{(p)}_{ij(k)}\}$ ale secțiunilor critice trebuie să li se atribuie semne. Aceasta se face analizînd semnul momentelor $\{\Delta M^{(k)}_{ij}\}$ din fiecare etapă și anume :

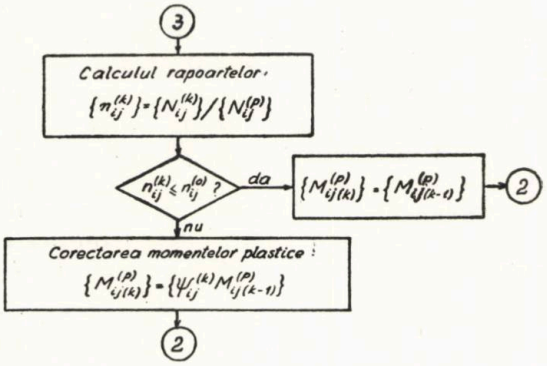


Fig. 5. — Bloc *B*.

α) dacă $\Delta M^{(k)}_{ij} > 0$ (momentul în secțiunea critică $(i - j)$ crește), semnul lui $M^{(p)}_{ij(k)}$ se păstrează același ca în etapa precedentă $(k - 1)$; β) dacă $\Delta M^{(k)}_{ij} < 0$ (momentul în secțiunea critică $(i - j)$ scade), se schimbă semnul lui $M^{(p)}_{ij(k)}$ față de semnul din etapa $(k - 1)$.

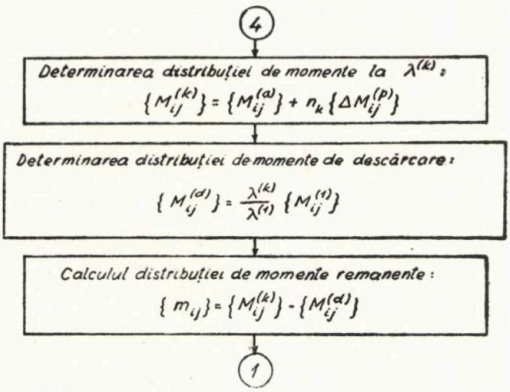


Fig. 6. — Bloc *C*.

Pentru prima etapă de calcul, semnele momentelor $\{M^{(p)}_{ij(1)}\}$ se aleg aceleași cu cele ale momentelor $\{\Delta M^{(1)}_{ij}\}$.

c) Pentru secțiunile critice în care s-au format deja articulații plastice, $\Delta M_{ij}^{(k)}$ și $M_{ij}^{*(k)}$ au, în etapele următoare, valori nule și de aceea, pentru a evita nedeterminarea, li se atribuie coeficienților $\alpha_{ij}^{(k)}$ corespunzători valoarea zero, care se păstrează pînă la sfîrșitul ciclului de încărcare sau reîncărcare.

În fig. 4 este prezentată schema operațiilor principale de calcul pentru analiza comportării elastico-plastice prin procedeul prezentat. În această schemă blocul *A* cuprinde operațiile de determinare a distribuției de eforturi pentru variația arbitrară $\lambda_a^{(k)}$ a factorului de încărcare și este deci alcătuit în raport cu metoda elastică de calcul adoptată, blocul *B* include operațiile de corectare a momentelor plastice ținînd cont de influența forțelor axiale mari [15], iar blocul *C* intervine în cazul calculului la sarcini variabile și se referă la determinarea distribuțiilor de eforturi remanente (fig. 5 și 6).

Încercările experimentale efectuate pe modele de cadre metalice [15]...[17] confirmă în mare măsură rezultatele teoretice obținute printr-un calcul în etape succesive, bazat pe procedeul indicat în lucrare.

Primită la 4 iulie 1972

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de statică și rezistență

BIBLIOGRAFIE

1. Massonnet Ch., Save M., *Calcul plastique des constructions.* Vol. I, ed. II, Bruxelles, 1967.
2. Neal B. G., *The Plastic Method of Structural Analysis.* Ed. II, Chapman and Hall, London, 1963.
3. Baker J. F., Horne M. R., Heyman J., *The Steel Skeleton.* Cambridge University Press, 1956.
4. Hodge Ph. G., *Plastic Analysis of Structures,* New York, 1959.
5. Gheorghiu A., Pacoste C., Iordănescu M., *Privire de sinteză asupra căilor eficiente de rezolvare prin etape succesive a structurilor în domeniul elasto-plastic.* St. și cerc. mec. apl., *6,* 1369—1394 (1970).
6. Gheorghiu A., Pacoste C., Ionescu Gh., Iordănescu M., *Utilizarea calculatoarelor electronice pentru stabilirea directă a ordinii de formare a articulațiilor plastice la cadre încărcate proporțional.* St. și cerc. mec. apl., *5* (1968).
7. Hangan M., *O metodă de calcul prin aproximații succesive a structurilor multiplu nedeterminate în domeniul plastic.* St. și cerc. mec. apl., *3,* 795—817 (1959).
8. English J. M., *Design of Frames by Relaxation of Yield Hinges.* Journal ASCE, 79, 322 (1953).
9. Fuxa U., *Sul calcolo a rottura delle strutture iperstatiche.* Il Cemento, **62**, *2,* (1962); Ibid., 88, *3,* 9 (1965).
10. Pozzati P., *Sul calcolo a rottura delle strutture iperstatiche.* Giornale del Genio Civile, maggio, 298—304 (1955).
11. Alvarez R. J., Birnstiel Ch., *Elasto-Plastic Analysis of Plane Rigid Frames.* New York University, School of Engineering and Science, 1967.
12. Wang C. K., *General Computer Program for Limit Analysis.* J. Struct. Div., ASCE, ST —6, 101—117 (1963).

13. Heidebrecht A. C., Seng-Li Lee, Fleming J. F., *Dynamic Analysis of Elastic-Plastic Structures.* J. Struct. Div., ASCE, EM—2 (1960).
14. Clough R., Benuska K. L., Wilson E. L., *Inelastic Earthquake Response of Tall Buildings.* Proc. of the III-rd WCEE, Wellington, 1965.
15. Amariei C., *Contribuţii privind calculul în domeniul plastic al structurilor metalice plane alcătuite din bare.* Teză de doctorat, Inst. polit., Iaşi, 1972.
16. Orlovschi N., Dumitraş A., Amariei C., Ungureanu N., Tanasachi L., *Studiul în domeniul plastic al cadrelor metalice pe modele la scară redusă.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XII (XVI), *1—2* (1966).
17. Amariei C., Orlovschi N., Neacşu E., Vulpe A., Tanasachi L., *Asupra formării articulaţiilor plastice la cadre metalice.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XII (XVI), *3—4* (1966).

UNE VOIE GÉNÉRALE D'ANALYSE DU COMPORTEMENT ÉLASTO-PLASTIQUE DES STRUCTURES MÉTALLIQUES PLANES FORMÉES DE BARRES

(Résumé)

On présente une voie générale pour l'analyse élasto-plastique permettant d'établir le comportement jusqu'à la ruine des structures formées de barres, en ce qui concerne l'ordre d'apparition des rotules plastiques, la distribution des efforts et la grandeur des déplacements. Le procédé est développé aussi pour l'analyse des structures sollicitées par des charges variables, en indiquant les opérations de calcul dans ce cas.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secţia V
CONSTRUCŢII. ARHITECTURĂ

C. Z. 539 4

RELAŢII EFORTURI—DEPLASĂRI PENTRU BARA CU VUTĂ DREAPTĂ, CARE ŢIN SEAMA DE INFLUENŢA FORŢELOR AXIALĂ ŞI TĂIETOARE

DE

ŞT. JERCA

1. Introducere

Pentru calculul de ordinul doi şi de stabilitate a structurilor plane din bare, fie prin procedeele clasice de rezolvare a ecuaţiilor de condiţie sau iterative, fie prin procedeele matriceale, sînt necesare relaţiile dintre eforturile din capetele unei bare şi deplasările acestor capete. Aceste relaţii furnizează, pentru metodele clasice, rigidităţile absolute, relative şi coeficienţii de transmitere, iar pentru cele matriceale, matricele de rigiditate şi de flexibilitate ale barei.

Pentru bara cu secţiune constantă, relaţiile eforturi—deplasări stabilite de R. K. L i v e s l e y [1] ţin seama numai de influenţa forţei axiale, iar cele obţinute de către E. A b s i [2] şi de influenţa forţei tăietoare. De asemenea R. K r y n i c k i [3] a studiat bara cu secţiunea dreptunghiulară de lăţime constantă şi înălţime variabilă liniar de-a lungul barei, iar împreună cu Z. M a z u r k i e v i c i [4] bara cu forma trunchi de piramidă sau trunchi de con, în ambele cazuri considerînd numai influenţa forţei axiale.

Cadrele, în special cele utilizate în construcţii industriale, conţin bare cu vute drepte şi într-o lucrare anterioară [5] s-au stabilit pentru astfel de bare relaţii eforturi—deplasări care ţin seama numai de influenţa forţei axiale.

În scopul includerii în calcul a cît mai mulţi factori care influenţează comportarea structurii, în cele ce urmează se stabilesc relaţiile eforturi — deplasări pentru bara cu vuta dreaptă la stînga, care ţin seama atît de influenţa forţei axiale cît şi de cea a forţei tăietoare.

În acest caz rigidităţile absolute ale barei cu secţiunea constantă vor fi corectate cu anumite funcţii de patru argumente : raportul înălţimilor vutei, raportul lungimilor vutei şi barei, raportul dintre forţa axială şi rigiditatea la încovoiere a barei şi raportul dintre forţa axială şi rigiditatea la forfecare a barei.

Pentru a facilita folosirea practică a relaţiilor eforturi —deplasări, astfel obţinute, funcţiile de corecţie pot fi întabulate.

Relaţiile eforturi —deplasări pentru bara cu vută la capătul din dreapta sau cu vute la ambele capete, pot fi obţinute fără dificultate din cele ale barei cu vuta la stînga şi ale barei cu secţiunea constantă.

2. Relaţii generale

Se consideră o bară de lungime L, cu secţiunea dreptunghiulară de lăţime constantă b şi înălţime variind liniar de la h_1 la h_0, numai pe distanţa l de la capătul din stînga (fig. 1).

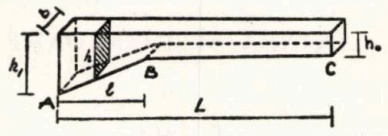


Fig. 1. — Bara de secţiune dreptunghiulară cu vuta dreaptă la stînga.

Pe porţiunea AB expresia înălţimii secţiunii barei este :

$$h = h_0\left(\frac{1}{n} - m\xi\right), \tag{1 a}$$

unde s-au folosit următoarele notaţii :

$$n = \frac{h_0}{h_1}, \quad m = \frac{(1-n)}{n\lambda}, \quad \lambda = \frac{l}{L} \text{ şi } \xi = \frac{x}{L}. \tag{1 b}$$

Ariile şi momentele de inerţie ale secţiunilor de pe porţiunile AB şi BC vor fi :

$$A = A_0\left(\frac{1}{n} - m\xi\right), \quad I = I_0\left(\frac{1}{n} - m\xi\right)^3, \tag{2 a}$$

şi

$$A_0 = bh_0, \qquad I_0 = \frac{bh_0}{12}. \tag{2 b}$$

În ipoteza deformaţiilor mici axul deformat al barei trebuie să verifice următoarele ecuaţii diferenţiale :

$$\frac{dy}{d\xi} = \varphi L + \frac{kL}{GA}T, \tag{3 a}$$

şi

(3 b) $$\frac{d^2y}{d\xi^2} = -\frac{L^2}{EI}M + L\frac{d}{d\xi}\left(\frac{kT}{GA}\right),$$

unde M, T și φ reprezintă momentul încovoietor, forța tăietoare și respectiv panta axului deformat provenită numai din momentul încovoietor, dintr-o secțiune curentă a barei, E și G — modulii de elasticitate longitudinală și transversală a materialului din bară, k — coeficientul care ține seama de distribuția neuniformă a eforturilor unitare tangențiale pe secțiune și care pentru secțiunea dreptunghiulară are valoarea 1,3.

3. Bara dublu încastrată

Bara cu vuta dreaptă la stînga se consideră încastrată la ambele capete și supusă la deplasările și eforturile de capăt (fig. 2).

Se vor folosi următoarele convenții de semne : a) momentele încovoietoare și forța tăietoare se consideră pozitive cînd tind să rotească bara în sensul acelor de ceasornic, iar forța axială cînd comprimă bara ; b) rotirile de capăt și rotirea barei se consideră pozitive cînd acționează în sensul acelor de ceasornic.

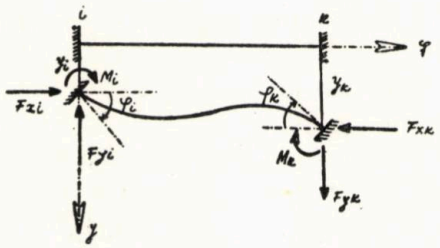


Fig. 2. — Bara dublu încastrată supusă la eforturi și deplasări de capăt.

Cele trei ecuații de echilibru ale barei introduc între eforturile de capăt următoarele relații :

(4 a) $$F_{xi} = F_{xk} = N, \quad F_{yi} = F_{yk} = T,$$

(4 b) $$T = -\frac{1}{L}[M_i + M_k + N(y_k - y_i)],$$

în baza cărora momentul încovoietor și forța tăietoare dintr-o secțiune curentă a barei au expresiile :

(5 a) $$M = Ny - \xi[M_i + M_k + N(y_k - y_i)] + M_i - Ny_i,$$

(5 b) $$T = N\sin\varphi + T\cos\varphi.$$

Ţinînd seama că pentru deformaţii mici se pot face aproximaţiile :

$$\sin\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{L}\cdot\frac{dy}{d\xi}, \quad \cos\varphi \approx 1,$$

relaţiile (5 a) şi (5 b) devin :

$$(6\text{ a}) \qquad M = N(y - B\xi - C), \qquad (6\text{ b}) \quad T = \frac{N}{L}\left(\frac{dy}{d\xi} - B\right),$$

unde s-au introdus notaţiile :

$$(7) \qquad B = y_k - y_i + \frac{M_i + M_k}{N}, \quad C = y_i - \frac{M_i}{N}.$$

Din relaţiile (2 a), (2 b), (3 b), (6 a) şi (6 b) rezultă că pe cele două porţiuni ale barei axul deformat satisface următoarele ecuaţii diferenţiale de ordinul doi, cu coeficienţi variabili, neomogene :

a) pe porţiunea AB, adică $0 \leqslant \xi \leqslant \lambda$:

$$(8\text{ a}) \qquad \left(\frac{1}{n} - m\xi\right)^2\left(\frac{1}{n} - m\xi - \alpha\right)\frac{d^2y_1}{d\xi^2} - m\alpha\left(\frac{1}{n} - m\xi\right)\frac{dy_1}{d\xi} + \beta^2 y_1 = \beta^2(B\xi + C) - \alpha m B\left(\frac{1}{n} - m\xi\right);$$

b) pe porţiunea BC, adică $\lambda \leqslant \xi \leqslant 1$:

$$(8\text{ b}) \qquad (1 - \alpha)\frac{d^2y_2}{d\xi^2} + \beta^2 y_2 = \beta^2(B\xi + C),$$

unde

$$(8\text{ c}) \qquad \alpha = \frac{Nk}{GA_0} \quad \text{şi} \quad \beta^2 = \frac{NL^2}{EI_0}.$$

Deoarece membrii din dreapta ai ecuaţiilor diferenţiale de mai sus sînt polinoame de gradul întîi, se caută soluţii particulare de aceeaşi formă, obţinîndu-se :

$$(9) \qquad y_{1p} = y_{2p} = B\xi + C.$$

Ecuaţia diferenţială omogenă ataşată ecuaţiei (8 a), cu schimbarea de variabilă

$$\frac{\alpha}{1/n - m\xi} = t,$$

capătă forma:

$$(10\text{ a}) \qquad t(1 - t)\frac{d^2y_1}{dt^2} + (2 - 3t)\frac{dy_1}{dt} + \left(\frac{\beta}{m}\right)^2\frac{1}{\alpha}y_1 = 0,$$

care este o ecuație diferențială hipergeometrică de tipul :

$$t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2}+[c-(a+b+1)t]\frac{dy}{dt}-aby=0, \tag{10 b}$$

unde :

$$c=2,\quad a=1+\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{m}\right)^2\frac{1}{\alpha}},\quad b=1-\sqrt{1+\left(\frac{\beta}{m}\right)^2\frac{1}{\alpha}}\ .$$

Deoarece $c=2$, cele două soluții liniar independente ale ecuației (10 a) sînt seriile hipergeometrice :

$$\left\{\begin{aligned} w_1(t) &= F(a,\,b\,;\,2\,;\,t)=\sum_{J=0}^{\infty}\frac{(a)_J\,(b)_J}{(2)_J}\cdot\frac{t^J}{J!}\ ,\\ w_2(t) &= F(a,\,b\,;\,2\,;\,t)\ln t+\sum_{J=1}^{\infty}\frac{(a)_J\,(b)_J}{(2)_J\,J!}[\psi(a+J)-\psi(a)+\\ &\quad+\psi(b+J)-\psi(b)-\psi(2+J)+\psi(2)-\psi(J+1)+\psi(1)]\,t^J+\\ &\quad+\frac{1}{(1-a)(1-b)\,t}, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

unde $\psi(x)=\dfrac{d}{dx}\ln\Gamma(x)$ este funcția psi sau digama, $\Gamma(x)$ este funcția gama, iar $(a)_J=a(a+1)(a+2)...(a+J-1)$ cu $(a)_0=1$.

Seriile hipergeometrice (11) sînt convergente pentru $|t|<1$ și $a,\,b\neq 0$ și 1, condiții care sînt îndeplinite, căci din schimbarea de variabilă efectuată rezultă că $t\in[n\alpha,\,\alpha]$, ambele limite ale intervalului fiind subunitare. Revenind la variabila ξ, rezultă că sistemul fundamental de soluții al ecuației diferențiale omogene atașată ecuației (8 a) este :

$$\left\{\begin{aligned} w_1\left(\frac{\alpha}{1/n-m\xi}\right) &= F\left(a,\,b\,;\,2\,;\,\frac{\alpha}{1/n-m\xi}\right),\\ w_2\left(\frac{\alpha}{1/n-m\xi}\right) &= F\left(a,\,b\,;\,2\,;\,\frac{\alpha}{1/n-m\xi}\right)\ln\frac{\alpha}{1/n-m\xi}+\\ &+\sum_{J=1}^{\infty}\frac{(a)_J\,(b)_J}{(2)_J\,J!}\,[\psi(a+J)-\psi(a)+\psi(b+J)-\psi(b)-\psi(2+J)+\\ &\quad+\psi(2)-\psi(J+1)+\psi(1)]\,\frac{\alpha^J}{(1/n-m\xi)^J}+\\ &\quad+\frac{1}{(1-a)(1-b)}\cdot\frac{1/n-m\xi}{\alpha}. \end{aligned}\right. \tag{11a}$$

Soluțiile generale ale ecuațiilor diferențiale (8 a) și (8 b) vor fi:

$$(12)\quad \begin{cases} y_1(\xi) = D_1 w_1\left(\dfrac{\alpha}{1/n - m\xi}\right) + D_2 w_2\left(\dfrac{\alpha}{1/n - m\xi}\right) + B\xi + C, \\ y_2(\xi) = D_3 \sin \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\alpha}}\,\xi + D_4 \cos \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\alpha}}\,\xi + B\xi + C. \end{cases}$$

Cele patru constante de integrare D_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, se determină din următoarele condiții la limită:

$$(13)\quad y_1(0) = y_i\,,\quad y_1(\lambda) = y_2(\lambda)\,,\quad \frac{dy_1}{d\xi}(\lambda) = \frac{dy_2}{d\xi}(\lambda)\,,\quad y_2(1) = y_k\,.$$

Din aceste condiții se obține următorul sistem de ecuații:

$$(14)\quad \begin{cases} D_1 w_1(n\alpha) + D_2 w_2(n\alpha) = \dfrac{M_i}{N}, \\ D_1 w_1(\alpha) + D_2 w_2(\alpha) - D_3 \sin \dfrac{\beta\lambda}{\sqrt{1-\alpha}} - D_4 \cos \dfrac{\beta\lambda}{\sqrt{1-\alpha}} = 0, \\ D_1 w_1'(\alpha) + D_2 w_2'(\alpha) - D_3 \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\alpha}} \cos \dfrac{\beta\lambda}{\sqrt{1-\alpha}} + \\ \quad + D_4 \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\alpha}} \sin \dfrac{\beta\lambda}{\sqrt{1-\alpha}} = 0, \\ D_3 \sin \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\alpha}} + D_4 \cos \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\alpha}} = -\dfrac{M_k}{N}, \end{cases}$$

unde

$$w_1'(\alpha) = \left[\frac{dw_1}{d\xi}\left(\frac{\alpha}{1/n - m\xi}\right)\right]_{\xi=\lambda},\quad w_2'(\alpha) = \left[\frac{dw_2}{d\xi}\left(\frac{\alpha}{1/n - m\xi}\right)\right]_{\xi=\lambda},$$

iar

$$(15)\quad \begin{aligned} \frac{dw_1}{d\xi} &= \frac{m\alpha}{(1/n - m\xi)^2} \cdot \frac{ab}{2} F\left(a+1\,;\ b+1\,;\ 3\,;\ \frac{\alpha}{1/n - m\xi}\right), \\ \frac{dw_2}{d\xi} &= \frac{m\alpha}{(1/n - m\xi)^2} \cdot \frac{ab}{2} F\left(a+1\,;\ b+1\,;\ 3\,;\ \frac{\alpha}{1/n - m\xi}\right) \times \end{aligned}$$

$$\times \ln \frac{\alpha}{1/n - m\xi} + \frac{m}{1/n - m\xi} F\left(a, b; 2; \frac{\alpha}{1/n - m\xi}\right) +$$

$$(15) \quad + \sum_{J=1}^{\infty} \frac{(a)_J (b)_J}{(2)_J (J-1)!} [\psi(a+J) - \psi(a) + \psi(b+J) - \psi(b) - \psi(2+J) +$$

$$+ \psi(2) - \psi(J+1) + \psi(1)] \frac{m\alpha^J}{(1/n - m\xi^{j+1})} - \frac{1}{(1-a)(1-b)} \cdot \frac{m}{\alpha} .$$

Soluțiile sistemului (14) sînt :

$$(16) \quad \begin{cases} D_1 = -\frac{1}{\Delta}\left(E_1 \frac{M_i}{N} + F_1 \frac{M_k}{N}\right), & D_2 = \frac{1}{\Delta}\left(E_2 \frac{M_i}{N} + F_2 \frac{M_k}{N}\right), \\ D_3 = \frac{1}{\Delta}\left(E_3 \frac{M_i}{N} + F_3 \frac{M_k}{N}\right), & D_4 = -\frac{1}{\Delta}\left(E_4 \frac{M_i}{N} + F_4 \frac{M_k}{N}\right), \end{cases}$$

unde s-au utilizat următoarele notații :

$$(17) \quad \begin{cases} E_1 = \frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha}} w_2(\alpha) \cos \frac{\beta(1-\lambda)}{\sqrt{1-\alpha}} + w_2'(\alpha) \sin \frac{\beta(1-\lambda)}{\sqrt{1-\alpha}} , \\ E_2 = \frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha}} w_1(\alpha) \cos \frac{\beta(1-\lambda)}{\sqrt{1-\alpha}} + w_1'(\alpha) \sin \frac{\beta(1-\lambda)}{\sqrt{1-\alpha}} , \\ E_3 = N_{11} \cos \frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha}}, \quad E_4 = N_{11} \sin \frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha}} , \\ F_1 = \frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha}} w_2(n\alpha), \qquad F_2 = \frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha}} w_1(n\alpha), \\ F_3 = \frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha}} N_{21} \sin \frac{\beta\lambda}{\sqrt{1-\alpha}} + N_{21}' \cos \frac{\beta\lambda}{\sqrt{1-\alpha}} , \\ F_4 = \frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha}} N_{21} \cos \frac{\beta\lambda}{\sqrt{1-\alpha}} - N_{21}' \sin \frac{\beta\lambda}{\sqrt{1-\alpha}} , \end{cases}$$

cu

$$(18) \quad \begin{cases} N_{21} = w_2(n\alpha) w_1(\alpha) - w_1(n\alpha) w_2(\alpha), \\ N_{21}' = w_2(n\alpha) w_1'(\alpha) - w_1(n\alpha) w_2'(\alpha), \\ N_{11} = w_1(\alpha) w_2'(\alpha) - w_2(\alpha) w_1'(\alpha), \end{cases}$$

$$(19) \quad \Delta = \frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha}} N_{21} \cos \frac{\beta(1-\lambda)}{\sqrt{1-\alpha}} + N_{21}' \sin \frac{\beta(1-\lambda)}{\sqrt{1-\alpha}} .$$

Relaţiile eforturi—deplasări se obţin din ecuaţia (3 **a**), pentru $\xi = 0$ şi $\xi = 1$, adică :

$$(20) \qquad y_1'(0) = \varphi_i L + \frac{kL}{GA(0)} T(0), \quad y_2'(1) = \varphi_k L + \frac{kL}{GA_0} T(1),$$

din care se obţine sistemul de ecuaţii :

$$(21) \quad \begin{cases} \dfrac{M_i}{N}\left[1 + (1 - n\alpha)\dfrac{\Delta_1}{\Delta}\right] + \dfrac{M_k}{N}\left[1 + (1 - n\alpha)\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\alpha}} \cdot \dfrac{N_{22}}{\Delta}\right] = \\ \qquad = \varphi_i L - (y_k - y_i), \\ \dfrac{M_i}{N}\left(1 + \beta\sqrt{1-\alpha}\,\dfrac{N_{11}}{\Delta}\right) + \dfrac{M_k}{N}\left(1 + \beta\sqrt{1-\alpha}\,\dfrac{\Delta_2}{\Delta}\right) = \varphi_k L - (y_k - y_i), \end{cases}$$

unde s-au introdus următoarele notaţii :

$$(22) \quad \begin{cases} \Delta_1 = \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\alpha}} N_{12}' \cos\dfrac{\beta(1-\lambda)}{\sqrt{1-\alpha}} + N_{12} \sin\dfrac{\beta(1-\lambda)}{\sqrt{1-\alpha}}, \\ \Delta_2 = \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\alpha}} N_{21} \sin\dfrac{\beta(1-\lambda)}{\sqrt{1-\alpha}} - N_{21}' \cos\dfrac{\beta(1-\lambda)}{\sqrt{1-\alpha}}, \end{cases}$$

cu

$$(23) \quad \begin{cases} N_{12}' = w_2'(n\alpha)\, w_1(\alpha) - w_2(\alpha)\, w_1'(n\alpha), \\ N_{12} = w_2'(n\alpha)\, w_1'(\alpha) - w_2'(\alpha)\, w_1'(n\alpha). \\ N_{22} = w_1(n\alpha)\, w_2'(n\alpha) - w_2(n\alpha)\, w_1'(n\alpha). \end{cases}$$

Wronskianul celor două soluţii liniar independente $w_1(t)$ şi $w_2(t)$ ale ecuaţiei diferenţiale (10 a), are valoarea :

$$W(w_1, w_2) = \frac{dw_1}{dt} w_2 - \frac{dw_2}{dt} w_1 = W_0 \frac{1}{t^2(1-t)},$$

unde W_0 este o constantă.

Trecînd la variabila ξ acest wronskian devine :

$$W(w_1, w_2) = W_0 \frac{m}{1 - \dfrac{\alpha}{1/n - m\xi}}$$

rezultînd

$$(24) \qquad N_{22} = \frac{1-\alpha}{1-n\alpha} N_{12}'.$$

Relația (24) dovedește egalitatea coeficienților rapoartelor M_k/N și M_i/N din prima și respectiv a doua ecuație a sistemului (21). În acest caz soluția sistemului (21) este :

$$\text{(25 a)} \quad \begin{cases} M_i = \dfrac{4EI_0}{L}\,\varkappa_1\,\varphi_i + \dfrac{2EI_0}{L}\,\varkappa_2\,\varphi_k - \dfrac{6EI_0}{L^2}\,\varkappa_4\,(y_k - y_i), \\ M_k = \dfrac{2EI_0}{L}\,\varkappa_2\,\varphi_i + \dfrac{4EI_0}{L}\,\varkappa_3\,\varphi_k - \dfrac{6EI_0}{L^2}\,\varkappa_5\,(y_k - y_i), \end{cases}$$

unde s-au introdus notațiile :

$$\text{(26 a)} \quad \begin{cases} \varkappa_1(n, \lambda, \alpha, \beta) = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\beta^2}{\delta}\left(1 + \beta\sqrt{1-\alpha}\,\dfrac{\Delta_2}{\Delta}\right), \\ \varkappa_2(n, \lambda, \alpha, \beta) = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\beta^2}{\delta}\left(1 + \beta\sqrt{1-\alpha}\,\dfrac{N'_{12}}{\Delta}\right), \\ \varkappa_3(n, \lambda, \alpha, \beta) = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\beta^2}{\delta}\left[1 + (1 - n\alpha)\,\dfrac{\Delta_1}{\Delta}\right], \\ \varkappa_4(n, \lambda, \alpha, \beta) = \dfrac{2}{3}\,\varkappa_1 + \dfrac{1}{3}\,\varkappa_2 = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{\beta^3}{\delta}\cdot\dfrac{\sqrt{1-\alpha}}{\Delta}\,(\Delta_2 - N'_{12}), \\ \varkappa_5(n, \lambda, \alpha, \beta) = \dfrac{2}{3}\,\varkappa_3 + \dfrac{1}{3}\,\varkappa_2 = \dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{\beta^2}{\delta}\cdot\dfrac{1}{\Delta}\,[(1 - n\alpha)\,\Delta_1 - \beta\sqrt{1-\alpha}N'_{12}], \\ \delta = \left[1 + (1 - n\alpha)\,\dfrac{\Delta_1}{\Delta}\right]\left(1 + \beta\sqrt{1-\alpha}\,\dfrac{\Delta_2}{\Delta}\right) - \left(1 + \beta\sqrt{1-\alpha}\,\dfrac{N'_{12}}{\Delta}\right)^2. \end{cases}$$

Din relațiile (4 b) și (24 a) rezultă :

$$\text{(25 b)} \quad T = -\frac{6EI_0}{L^2}\,\varkappa_4\varphi_i - \frac{6EI_0}{L^2}\,\varkappa_5\,\varphi_k + \frac{12EI_0}{L^3}\,\varkappa_6\,(y_k - y_i),$$

unde

$$\text{(26 b)} \quad \varkappa_6(n, \lambda, \alpha, \beta) = \frac{4}{3}\,(\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3) - \frac{\beta^2}{12} =$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{\beta^2}{\delta}\cdot\frac{1}{\Delta}\,[\sqrt{1-\alpha}\,(\Delta_2 - 2N'_{12}) + (1 - n\alpha)\,\Delta_1] - \frac{\beta^2}{12}\cdot$$

S-au obținut astfel relațiile eforturi—deplasări ale barei dublu încastrate (25 a) și (25 b) și cele 6 funcții de corecție a rigidităților absolute (26 a) și (26 b). Cu ajutorul acestora se pot stabili relații similare și pentru următoarele cazuri : a) bara încastrată la un capăt și articulată la celălal t

b) bara încastrată la un capăt și liberă la celălalt, c) bara încastrată la un capăt și încastrată glisant la celălalt capăt.

Din cauza asemănării modului de rezolvare și a importanței practice se va trata în continuare numai primul caz.

4. Bara încastrată și articulată

Se consideră bara cu vută la stînga, încastrată în acest capăt și articulată în celălalt, supusă la eforturile și deplasările de capăt (fig. 3).

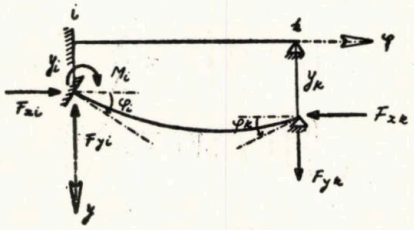


Fig. 3. — Bara încastrată și articulată supusă la eforturi și deplasări de capăt.

Cu ajutorul condiției $M_k = 0$ se elimină φ_k între expresiile (25 a) și (25 b), obținîndu-se următoarele relații eforturi —deplasări :

$$(27)\qquad \begin{cases} M_i = \dfrac{3EI_0}{L}\,\varkappa_1'\varphi_i - \dfrac{3EI_0}{L^2}\,\varkappa_1'(y_k - y_i), \\ T = -\dfrac{3EI_0}{L^2}\,\varkappa_1'\varphi_i + \dfrac{3EI_0}{L^2}\,\varkappa_2'(y_k - y_i), \end{cases}$$

unde :

$$(28)\qquad \varkappa_1' = \frac{1}{3}\cdot\frac{4\varkappa_1\varkappa_3 - \varkappa_2^2}{3}, \qquad \varkappa_2' = \frac{4\varkappa_3\varkappa_6 - 3\varkappa_5^2}{\varkappa_3}.$$

În cazul cînd bara este articulată în capătul din stînga și încastrată în cel din dreapta, cu condiția $M_i = 0$, se elimină φ_i între expresiile (25 a) și (25 b), obținîndu-se următoarele relații eforturi — deplasări :

$$(29)\qquad \begin{cases} M_k = \dfrac{3EI_0}{L}\,\varkappa_1''\varphi_k - \dfrac{3EI_0}{L^2}\,\varkappa_1''(y_k - y_i), \\ T = -\dfrac{3EI_0}{L}\,\varkappa_1''\varphi_k + \dfrac{3EI_0}{L^2}\,\varkappa_2''(y_k - y_i), \end{cases}$$

unde :

$$(30)\qquad \varkappa_1'' = \frac{1}{3}\cdot\frac{4\varkappa_1\varkappa_3 - \varkappa_2^2}{\varkappa_1}, \qquad \varkappa_2'' = \frac{4\varkappa_6\varkappa_1 - 3\varkappa_4^2}{\varkappa_1}.$$

5. Concluzii

Relațiile eforturi—deplasări pentru bara cu vută dreaptă la stînga' dublu încastrată, sau încastrată și articulată, au fost deduse luînd în considerație influența forțelor axială și tăietoare din bară ((25 a), (25 b), (27) și (29)).

Dimensiunile vutei și influența celor două forțe intervin prin cele șase respectiv două funcții de patru argumente ce corectează rigiditățile absolute ale barei cu secțiunea constantă ((26 a), (26 b), (28) și (30)).

Cu ajutorul relațiilor (18), (19), (22) și (23) aceste funcții pot fi întabulate, ceea ce prezintă importanță pentru folosirea lor în proiectare.

Primită la 27 ianuarie 1972

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de statică și rezistență

BIBLIOGRAFIE

1. Livesley R. K., *The Application of an Electronic Digital Computer to Some Problems of Structural Analysis.* The Structural Engineer, **XXXIV**, *1* (1956).
2. Absi E., *Calcul des Structures.* Ann. de l'Inst. Techn. et des Trav. Publ., *252* (1968).
3. Krynicki E., *Knicken und Biegen bei Rahmensystemen aus Stäben mit linear in Biegeebene veränderlichen Querschnitten.* Die Bautechnik, 7, 46 (1969).
4. Krynicki E., Mazurkiewicz Z., *Das Knicken und Biegen der aus Stäben mit veränderlichen Querschnitten bestehenden Rahmentragwerke.* Bauingenieur, **40**, *9* (1965).
5. Jerca Șt., *Relații eforturi—deplasări la bara cu vuta dreaptă ținînd seama de influența forței axiale.* Rev. Constr., *8* (1972).
6. Smirnov I. V., *Curs de matematici superioare,* (trad. din l. rusă). Vol. **II**, Ed. Tehn., Buc., 1954.
7. Stepanov V. V., *Curs de ecuații diferențiale,* (trad. din l. rusă). Ed. Tehn., Buc., 1955.
8. Abramowitz M., Stegun A. I., *Handbook of Mathematical Functions.* Dover Publications, Inc., New York, 1965.

ÉQUATIONS INTRINSÈQUES D'UNE POUTRE À GOUSSET RECTILIGNE, QUI TIENNENT COMPTE DES EFFETS DES EFFORTS TRANCHANT ET NORMAL

(Résumé)

Les méthodes classiques ou matricielles de résolution des structures par un calcul de deuxième ordre, sont basées sur l'utilisation des équations intrinsèques (ou équations de la déformation angulaire) d'une poutre.

Dans cette Note on établit ces équations pour la poutre droite à gousset rectiligne à gauche, dont les deux extrémités sont encastrées ou une extrémité est encastrée et l'autre articulée, en tenant compte des effets des efforts tranchant et normal.

Les effets des ces efforts et aussi des dimensions du gousset, interviennent par six fonctions à quatre arguments, dans le cas de la poutre double encastrée et par deux, dans celui de la poutre encastrée et articulée. Ces fonctions peuvent être tabulées, ce qui simplifie considérablement les calculs et permet d'étudier la stabilité au flambage des structures dans leur ensemble.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secţia V
CONSTRUCŢII. ARHITECTURĂ

D. K. 539.4; 624.04

ÜBER DAS KIPPEN DER TRÄGER AUF ZWEI STÜTZEN DEREN UNTERGURT IN DER HORIZONTALEN EBENE BEFESTIGT IST (I)

VON

DAN PRECUPANU, RUDOLF MÜHLBÄCHER und C. IONESCU

1. Allgemeines. Hypothesen

Das Studium des Kippens der Balken, die Bindungen in der horizontalen Ebene haben, hat eine grosse praktische Bedeutung, da viele solche Fälle in dem Entwurf und in der Ausführung der Bauelemente vorkommen. Im Folgenden wird der Fall eines Balkens auf zwei Auflagern, einem festen und einem beweglichen, mit rechteckigem Querschnitt analysiert, wobei der Untergurt so verbunden ist, dass dessen Ausweichen in der ganzen Länge in der horizontalen Ebene unmöglich ist.

Bei der Prüfung dieses Problems nehmen wir an, dass das Material des Balkens homogen ist, die Spannungen im elastischen Bereich sind und dass das H o o ksche Gesetz eingehalten wird.

Wir nehmen ferner an, dass die Verschiebungen der verformten Faser klein sind und dass die Kraftebene anfänglich vertikal, dei die Stabachse enthält auch vertikal bleibt, und die Stabachse in der wenig verformten Stellung schneidet, entsprechend der instabilen Gleichgewichtsstellung (Abb. 1 *b*). Wir vernachlässigen im Folgenden den Einfluss der Querkräfte und der unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung. Die Auflager des Balkens ermöglichen die Drehung der Endquerschnitte infolge der Biegung in vertikaler und horizontaler Ebene, ermöglichen aber die Drehung um eine Längsachse nicht.

2. Festlegen der Differentialgleichung

Wir betrachten einen Balken auf zwei Auflagern, der auf Biegung beansprucht ist (Abb. 1 *a*). Das Koordinatenachsensystem hat den Ursprung in dem linken Auflager, die Achsen sind in der Richtung der Längsachse

und bzw. in der Richtung der Haupträgheitsachsen des Querschnittes angenommen.

Aus dem allgemeinen Studium der Knickphenomäne ist bekannt, dass solange die äusseren Kräfte P_i nicht einen Grenzwert überschreiten — der auch kritischer Wert benannt wird — sich der Träger im stabilen Gleichgewicht, mits einer verformten Stellung in der vertikalen Ebene, befindet.

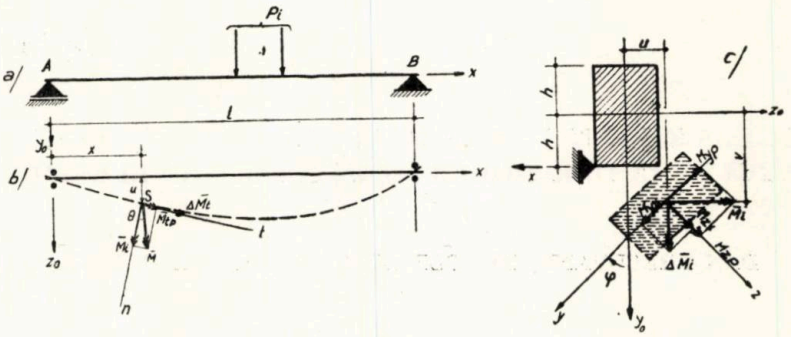


Abb. 1

Wenn aber diese Kräfte anwachsen, erreicht man eine Situation, wenn das Gleichgewicht unstabil wird, wobei auch eine Gleichgewichtsstellung in einer leicht verformten Stellung in der Seitenebene möglich ist (Abb. 1 *b*), durch Biegedrillknicken. Ein beliebiger Querschnitt des Trägers, in dieser letztgenannten Stellung, ist durch die vertikale Verschiebung v, durch die horizontale Verschiebung u, und durch die Drehung φ, gekennzeichnet, wobei alle positiv im gewählten Achsensystem angenommen werden (Abb. 1 *c*). Wir kommen überein, dass die Vektoren des Biegemomentes so ausgerichtet sind, indem wir in ihrer Richtung blicken, rechts die zugbeanspruchten Fasern sind. Die positiven Vorzeichen für die Biegemomente und für das Torsionsmoment werden laut Vereinbarung aus Abb. 2 entnommen.

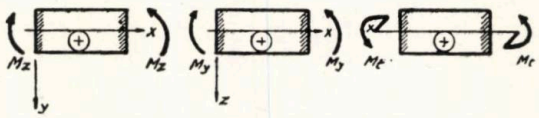


Abb. 2

Um die Schnittkräfte in diesem Fall zu ermitteln untersuchen wir in den Abb. 1 *b* und 1 *c* sowohl den Einfluss der äusseren Kräfte P_i, als auch den Einfluss der Bindungskräfte X.

Die äusseren Kräfte P_i führen in einem beliebigen Querschnitt S des verformten Balkens zu einem Moment $\overline{M}$, das in zwei Komponenten zerlegt werden kann :

a) ein Torsionsmoment

(1) $$M_{t\not p} = M \sin \theta \approx M\theta,$$

b) ein Biegemoment

$$M_i = M \cos \theta \approx M,$$

dessen Komponenten in der Richtung der Hauptträgheitsachsen des Querschnittes :

(2) $$M_{z\not p} = M \cos \varphi \approx M,$$

(3) $$M_{y\not p} = M \sin \varphi \approx M\varphi,$$

sind.

Die Bindungskraft X führt gleicherweise zu einem Zusatzmoment ΔM, welches nach Zerlegung folgende Komponenten hat :

(4) $$M_{tx} = \Delta M_t,$$

(5) $$M_{zx} = \Delta M_t \sin \varphi \approx \Delta M_t \ \varphi,$$

(6) $$M_{yx} = -\Delta M_t \cos \varphi \approx -\Delta M_t .$$

Überlagert man die Effekte aus beiden Einflüssen, erhält man folgende Gesammtschnittkräfte :

(7) $$M_t = M\theta + \Delta M_t,$$

(8) $$M_z = M + \Delta M_t \varphi,$$

(9) $$M_y = M\varphi - \Delta M_t.$$

Die Differentialgleichungen der Torsion und der beiden Biegebeanspruchungen werden :

(10) $$\varphi' = \frac{M\theta + \Delta M_t}{GI_t},$$

(11) $$v'' = -\frac{M + \Delta M_t \varphi}{EI_z},$$

(12) $$u'' = -\frac{M\varphi - \Delta M_t}{EI_y},$$

wobei GI_t, EI_z und EI_y die Querschnittssteifigkeit für Drillung, für Biegung in der vertikalen Ebene und beziehungsweise für Biegung in horizontaler Ebene darstellen.

Die Anwesenheit der seitlichen Verbindung wird durch die Bedingung :

(13) $$u = h\varphi$$

dargestellt, zu welcher wir noch die geometrische Beziehung

$$\frac{du}{dx} = \theta \tag{14}$$

hinzufügen.

Die Beziehungen (10)...(14) übertragen mathematisch das physische Knickphenomän des angenommenen Balkens. Die Grössen ΔM_t, ΔM_t können in Abhängigkeit von X ausgedrückt werden, falls man dessen Distributionsgesetz in Balkenlängsachse kennt. So bilden die Gleichungen (10)...(14) mit den Variablen u, v, φ, θ und X ein System mit 5 Gleichungen und 5 Unbekannten, woraus das kritische Biegungsmoment hervorgeht.

Nimmt man für die Bindungskraft X eine Sinusfunktion der Form

$$X = X_0 \sin \frac{\pi x}{l} \tag{15}$$

an, erhält man für die Momente ΔM_t und ΔM_t die Ausdrücke :

$$\Delta M_t = \frac{X_0 l^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} \tag{16}$$

und

$$\Delta M_t = \frac{X_0 lh}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l}. \tag{17}$$

Kommt man auf die Gleichungen (10), (12) zurück, und berücksichtigt man (13), (14), (16) und (17), so erhält man :

$$\frac{u'}{h} GI_t = Mu' + \frac{X_0 lh}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l}, \quad u'' EI_y = -M \frac{u}{h} + \frac{X_0 l^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Schliesst man aus diesem Gleichungssystem den Parameter X_0 aus, erhält man die Stabilitätsgleichung folgender Form :

$$-A(x)\, u'' + B(x)u' - C(x)u = 0, \tag{18}$$

wobei :

$$A(x) = EI_y h \cos \frac{\pi x}{l}, \tag{19}$$

$$B(x) = \frac{GI_t - hM}{h} \cdot \frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi}{l} x, \tag{20}$$

$$C(x) = M \cos \frac{\pi x}{l} \cdot \tag{21}$$

Durch die Integration der Gleichung (18) erhält man den Wert des kritischen Biegemomentes. Die Koeffizienten $A(x)$, $B(x)$ und $C(x)$ sind veränderlich und darum muss die Lösung der Stabilitätsgleichung mit Hilfe von speziellen Funktionen gefunden werden. Wendet man numerische Methoden an, z.B. die Methode der endlichen Differenzen, dann kann gezeigt werden, dass der Ausdruck des kritischen Biegemomentes, in der allgemeinen Form

$$M_{cr} = C_1 \frac{EI_y}{l^2} h + C_2 \frac{GI_t}{h} \tag{22}$$

ausgedrückt werden kann, wobei C_1 und C_2 numerische Koeffizienten sind, die nur von der Natur und von der Verteilung der äusseren Kräfte abhängen.

3. Schlussfolgerungen

Die Stabilitätsgleichung (18) lösst das Kippproblem der einfach gelagerten Träger, die eine kontinuierliche Verbindung am Untergurt aufweisen, für jeden äusseren Belastungsfall. Falls die Bindungskraft X einem anderen Gesetz gehorcht, ändern sich die Werte des kritischen Biegemomentes in sehr engen Grenzen. Dieses, sowie die Werte der Koeffizienten C_1 und C_2 für verschiedene Belastungsfälle P_t, werden in einer weiteren Arbeit gezeigt werden.

Eingegangen am 15. Januar 1972

Technische Hochschule, Jassy
Lehrstuhl für Festigkeitslehr
und Statik der Bauwesen

LITERATURVERZEICHNIS

1. Timoshenko S. P., *Teoria stabilităţii elastice*, (aus dem Englischen übersetzt). Ed. Tehn., Buc., 1967.

ASUPRA STABILITĂŢII GENERALE A GRINZILOR SIMPLU REZEMATE AVÎND TALPA INFERIOARĂ FIXATĂ ÎN PLAN ORIZONTAL

(Rezumat)

Se studiază problema stabilităţii generale a grinzilor simplu rezemate, cu secţiune dreptunghiulară, solicitate la încovoiere plană. La nivelul feţei inferioare grinda este fixată în plan orizontal prin intermediul unei legături continue. Admiţînd pentru forţa de legătură o variaţie sinusoidală, se ajunge la ecuaţia de stabilitate (18) care prin integrare conduce la expresia momentului critic (22).

Ecuaţia de stabilitate (18) permite soluţionarea problemei pentru orice distribuţie a încărcării exterioare, rezultatele obţinute încadrîndu-se, pe baza ipotezelor făcute, în limita de precizie a calculelor inginereşti.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secţia V
CONSTRUCŢII. ARHITECTURĂ

C.Z. 624.1; 539.4

INFLUENŢA VARIAŢIEI LINIARE CU ADÎNCIMEA A MODULULUI DE ELASTICITATE AL PĂMÎNTULUI ASUPRA DEPLASĂRILOR ŞI TASĂRILOR SUB ACŢIUNEA UNEI ÎNCĂRCĂRI UNIFORM REPARTIZATE ÎN FORMĂ DE FÎŞIE ELASTICĂ

DE

AL. EFTIMIE şi VICTOR ZAVATI

1. Introducere

Considerînd terenul de fundaţie un semispaţiu elastic izotrop cu modul de elasticitate liniar variabil cu adîncimea după legea $E = mz$, coeficientul lui P o i s s o n fiind presupus constant, acţionat de o forţă verticală uniform distribuită în lungul unei axe pe suprafaţa de separaţie (fig. 1 *a*), în lucrarea [2] s-au stabilit expresiile deplasărilor unui punct oarecare, de forma :

$$V = \frac{1+\nu}{m} \cdot \frac{np}{2} \cdot \frac{1+\mu}{\sin(n\pi/2)} \left(\frac{1-2\nu}{2} \cdot \frac{1}{nz} \sin\left(n \operatorname{arctg} \frac{y}{z} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4z} \left\{ \frac{\sin[(2+n) \operatorname{arctg}(y/z)]}{2+n} + \frac{\sin[(2-n) \operatorname{arctg}(y/z)]}{2-n} \right\} \right), \tag{1 a}$$

$$W = \frac{1+\nu}{m} \cdot \frac{np}{2} \cdot \frac{1+\mu}{\sin(n\pi/2)} \left(\frac{1-2\nu}{2} \cdot \frac{1}{ny} \sin[n \operatorname{arctg}(y/z)] + \right.$$

$$+ \frac{1}{4y} \left\{ \frac{\sin[(2+n) \operatorname{arctg}(y/z)]}{2+n} + \frac{\sin[(2-n) \operatorname{arctg}(y/z)]}{2-n} \right\} -$$

$$\left. - \frac{1-2\nu}{2} \cdot \frac{1}{nd} \sin\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{4d} \left[\frac{\sin(2+n)(\pi/2)}{2+n} + \frac{\sin(2-n)(\pi/2)}{2-n} \right] \right), \tag{1 b}$$

în care m este tangenta unghiului făcut de dreapta care reprezintă variaţia modulului de elasticitate al mediului cu adîncimea, ν — coeficientul lui Poisson, $\mu = \nu/(1-\nu)$, $n = \sqrt{2(1-\mu)}$, p — intensitatea forţei şi d — distanţa la care un punct de pe suprafaţa planului de separaţie are deplasare verticală nulă.

Deplasarea verticală a unui punct de pe suprafaţa de separaţie rezultă din (1 *b*) pentru $z = 0$ şi are forma:

$$W_0 = \frac{1+\nu}{m} \cdot \frac{np}{2} \cdot \frac{1+\mu}{\sin(n\pi/2)} \left\{ \frac{1-2\nu}{2} \cdot \frac{1}{ny} \sin\frac{n\pi}{2} + \right.$$

$$+ \frac{1}{4y} \left[\frac{\sin(2+n)(\pi/2)}{2+n} + \frac{\sin(2-n)(\pi/2)}{2-n} \right] -$$

$$\left. - \frac{1-\nu}{2} \cdot \frac{1}{nd} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4d} \left[\frac{\sin(2+n)(\pi/2)}{2+n} + \frac{\sin(2-n)(\pi/2)}{2-n} \right] \right\}. \tag{2}$$

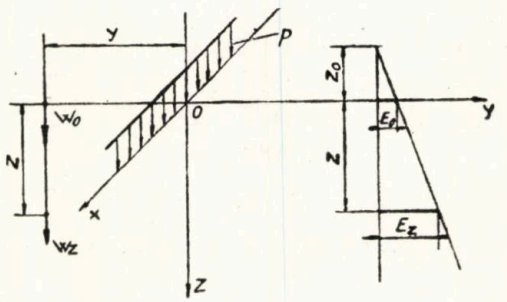


Fig. 1

Deoarece, de cele mai multe ori, pe planul de separaţie modulul de elasticitate $E_0 \neq 0$, în relaţiile de mai sus se va lua în calcul o adîncime $z_c = z_0 + z = E_0/m + z$, (fig. 1 *b*).

2. Calculul deplasării verticale şi a tasării

În această lucrare se abordează problema stabilirii expresiei deplasării verticale a unui punct şi a mărimii tasării în cazul cînd semispaţiul elastic izotrop, cu modul de elasticitate liniar variabil cu adîncimea, este acţionat pe planul de separaţie de o forţă verticală uniform distribuită pe o suprafaţă în formă de fîşie elastică (fig. 2).

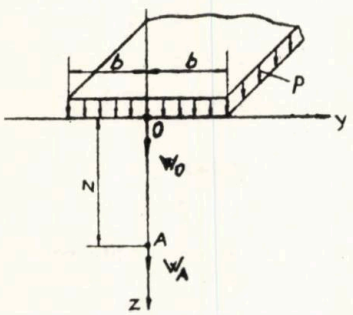


Fig. 2

În acest scop, pornind de la relația (2) și aplicînd principiul suprapunerii efectelor, deplasarea verticală a punctului O (mijlocul lățimii fîșiei) rezultă din relația :

$$W_0 = \int_{-b}^{+b} \frac{1+\nu}{m} \cdot \frac{np}{2} \cdot \frac{1+\mu}{\sin(n\pi/2)} \left\{ \frac{1-2\nu}{2} \cdot \frac{1}{n|y|} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{4|y|} \left[\frac{\sin(2+n)(\pi/2)}{2+n} + \frac{\sin(2-n)(\pi/2)}{2-n} \right] \left. \right\} dy +$$

$$+ \int_{-b}^{+b} \frac{1+\nu}{m} \cdot \frac{np}{2} \cdot \frac{1+\mu}{\sin(n\pi/2)} \left\{ - \frac{1-2\nu}{2} \cdot \frac{1}{nd} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4d} \left[\frac{\sin(2+n)(\pi/2)}{2+n} + \frac{\sin(2-n)(\pi/2)}{2-n} \right] \right\} dy.$$

Se observă că prima integrală este nulă încît :

$$W_0 = \frac{1+\nu}{m} nbp \frac{1+\mu}{\sin(\pi/2)} \left\{ - \frac{1-2\nu}{2} \cdot \frac{1}{nd} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4d} \left[\frac{\sin(2+n)(\pi/2)}{2+n} + \frac{\sin(2-n)(\pi/2)}{2-n} \right] \right\}. \tag{3}$$

Deplasarea verticală a unui punct A aflat la adîncimea z pe verticala punctului O, ținînd seama de relația (1 b), se obține din :

$$W_A = 2 \int_0^b \frac{1+\nu}{m} \cdot \frac{np}{2} \cdot \frac{1+\mu}{\sin(n\pi/2)} \left(\frac{1-2\nu}{2} \cdot \frac{1}{ny} \sin\left(n \operatorname{arctg} \frac{y}{z}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4y} \left\{ \frac{\sin[(2+n) \operatorname{arctg}(y/z)]}{2+n} + \frac{\sin[(2-n) \operatorname{arctg}(y/z)]}{2-n} \right\} \right) dy +$$

$$+ 2 \int_0^b \frac{1+\nu}{m} \cdot \frac{np}{2} \cdot \frac{1+\mu}{\sin(n\pi/2)} \left\{ - \frac{1-2\nu}{2} \cdot \frac{1}{nd} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4d} \left[\frac{\sin(2+n)(\pi/2)}{2+n} + \frac{\sin(2-n)(\pi/2)}{2-n} \right] \right\} dy.$$

Expresia

$$I_1 = \int_0^b \frac{1}{ny} \sin\left(n \operatorname{arctg} \frac{y}{z} \right) dy,$$

care intervine în relația de mai sus, nu se poate exprima prin combinații finite de funcții elementare. Dezvoltarea funcției sin $[n \operatorname{arctg} (y/z)]$, evident periodică, în serie F o u r i e r, în scopul aproximării lui I_1 prin primii termeni, conduce la integrale de același tip, adică la consinusi și sinusi integrali.

Este avantajos să se exprime funcția

$$\sin [n \operatorname{arctg} (y/z)] = \sin [n \operatorname{arctg} \cos (z/\sqrt{y^2 + z^2})]$$

printr-un polinom C e b î ș e v. Se știe că un polinom C e b î ș e v de speța a doua este de forma :

$$U_n(x) = \sin (n \operatorname{arc} \cos x) = \sqrt{1-x^2}\,[C_n^1 x^{n-1} - C_n^3 x^{n-3} (1-x^2) + C_n^5 x^{n-5} (1-x)^2 + \ldots].$$

Pentru n număr natural se obțin cazurile particulare :

$$U_0(x) = 0, \quad \text{pentru } n = 0,$$
$$U_1(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad \text{pentru } n = 1,$$
$$U_2(x) = 2x - \sqrt{1-x^2}, \quad \text{pentru } n = 2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Este ușor de verificat că, în cazul pămînturilor, coeficientul n poate varia numai între 0 și $\sqrt{2}$. Urmează că soluția este limitată numai la acele cazuri cînd, într-o a doua aproximație se poate accepta $n = 1$; această situație poate avea loc numai pentru valorile coeficientului lui P o i s s o n cuprinse între limitele 0,25 și 0,35.

Considerînd deci $n = 1$, rezultă

$$I_1 = \int_0^b \frac{1}{y} \sin\left(n \operatorname{arctg} \frac{y}{z} \right) dy = \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + z^2}}{z},$$

$$I_2 = \frac{1}{4} \int_0^b \frac{1}{y} \cdot \frac{\sin[(2+n) \operatorname{arctg}(y/z)]}{2+n}\, dy = \frac{5}{4} \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} - \frac{1}{12} \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + z^2}}{z},$$

$$I_3 = \frac{1}{4} \int_0^b \frac{1}{y} \sin\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{z} \right) dy = \frac{1}{4} \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + z^2}}{z}.$$

În aceste condiții se obține următoarea relație aproximativă pentru determinarea deplasării verticale a unui punct oarecare, A, aflat la adîncimea z pe verticala mijlocului lățimii fîșiei :

$$W_z = \frac{1+\nu}{m} np \frac{1+\mu}{\sin(n\pi/2)} \left(\frac{5}{4} \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2+z^2}} + \frac{2+3\nu}{3} \ln \frac{b+\sqrt{b^2+z^2}}{z} \right) +$$

$$+ \frac{1+\nu}{m} nbp \frac{1+\mu}{\sin(n\pi/2)} \left\{ - \frac{1-2\nu}{2} \cdot \frac{1}{nd} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \right. \tag{4}$$

$$\left. - \frac{1}{4d} \left[\frac{\sin(2+n)(\pi/2)}{2+n} + \frac{\sin(2-n)(\pi/2)}{2-n} \right] \right\}.$$

Deformaţia verticală (tasarea) stratului între punctele O şi A se obţine din diferenţa $W_0 - W_A = T_{OA}$. Expresiile deplasărilor punctelor care nu se află pe verticala mijlocului lăţimii fîşiei se pot stabili în mod asemănător.

3. Exemplu numeric

Pentru a cerceta influenţa sau efectul variaţiei liniare cu adîncimea a modulului de elasticitate al pămîntului asupra mărimii tasării, comparativ cu ipoteza modulului de elasticitate constant, se recurge la un exemplu numeric.

Astfel, pentru $2b = 100$ cm, $E_0 = 50$ kgf/cm^2, $\nu = 0{,}35$ şi $m = 0{,}2$ kgf/cm^3, cu relaţia $T = W_i - W_{i+1}$ s-a calculat tasarea fiecărui strat de 1 m grosime (tasarea specifică). Pentru primul strat s-a considerat $i = 0$ şi $W_i = W_0$ dat de relaţia (3), iar pentru straturile următoare s-a folosit relaţia (4) luînd în calcul $z_c = z + z_0 = z_{i+1} + E_0/m$, obţinîndu-se rezultatele înregistrate în prima linie a tabelului 1.

În ipoteza $E = \text{const.} = E_0 = 50$ kgf/cm^2, cu formula lui Michell [4]:

$$W_0 = W_z = \frac{2bp}{\pi E_0} \left[(1-\nu^2) \ln \frac{b^2+z^2}{b^2} + (1-\nu-\nu^2) \frac{z}{b} \operatorname{arctg} \frac{b}{z} \right]$$

s-au obţinut tasările specifice înregistrate în linia a doua a aceluiaşi tabel. În ultima coloană a tabelului s-a înregistrat tasarea totală, obţinută prin sumarea tasărilor specifice.

Tabelul 1

Ipoteza \ z [cm]	100	200	300	400	500	600	Tasarea totală
$E = E_0 + mz$	0,940 p	0,480 p	0,384 p	0,212 p	0,157 p	0,080 p	2,217 p
$E = E_0$	1,140 p	0,730 p	0,410 p	0,310 p	0,224 p	0,220 p	3,040 p

4. Concluzii

Cercetarea rezultatelor din tabelul 1 conduce la următoarele concluzii:

1° Tasările specifice calculate în ipoteza variaţiei liniare cu adîncimea a modulului de elasticitate sînt mai mici şi descresc mai repede în adîncime decît cele calculate în ipoteza modulului de elasticitate constant.

2° Tasarea totală calculată în prima ipoteză este mai mică decît cea calculată în ipoteza a doua. Pentru un strat de 6 m grosime şi cu datele luate în consideraţie, a rezultat o diferenţă de 27%.

Formulele stabilite în lucrare bazîndu-se pe unele aproximaţii, este de aşteptat ca în realitate diferenţa să fie chiar mai mare.

Primită la 16 septembrie 1971

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de statică şi rezistenţă
şi
Catedra de construcţii hidrotehnice

BIBLIOGRAFIE

1. Eftimie Al., Botez-Popescu Gh., *Unele rezultate cu privire la tensiunile şi deplasările într-un semispaţiu elastic neomogen.* A doua conferinţă de mecanică tehnică. Buc., oct., 1970.
2. Eftimie Al., *Distribuţia tensiunilor în terenurile de fundaţie cu modul de elasticitate liniar variabil.* Bul. Inst. polit. Iaşi, XVI (XX), *1—2* (1970).
3. Лехницкий С. Г., *Радиалное распределение напряжении в клине полуплоскости с переменный модулем упругости.* ПММ, **26**, *1* (1962).
4. Fischer K., *Beispiele zur Bodenmechanik.* 1965, 51.

ВЛИЯНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ИЗМЕНЧИВОСТИ ПО ГЛУБИНЕ МОДУЛЯ УПРУГОСТИ ГРУНТА НА СДВИГИ И ОСАДКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ БЕСПРЕРЫВНЫХ УПРУЧИХ ФУНДАМЕНТОВ

(Резюме)

Исследовано влияние линейной изменчивости по глубине модуля упругости грунта на величину осадок под безпрерывным упругим фундаментом.

Установленное приближенное выражение для вертикального сдвига точек ограниченное в рамках изменения коэффициента Пуассона в промежутке $\nu \in [3; 3{,}5]$ дало возможность установить, что удельные осадки имеют меньшую величину и уменьшаются с глубиной быстрее по сравнению с величиной осадок вычисленной по гипотезе постоянного модуля упругости, следовательно полная осадка становится меньше приблизительно на 30%.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secţia V
CONSTRUCŢII. ARHITECTURĂ

C.D. 624.04 ; 624.1

CALCUL DES ÉLÉMENTS DE CONSTRUCTIONS LINÉAIRES ET PLANES APPUYÉES SUR UN DEMI-ESPACE ÉLASTIQUE, HOMOGÈNE ET TRANSVERSALEMENT ANISOTROPE

PAR

IULIAN IONESCU

1. Introduction

Dans le calcul des éléments de constructions appuyées sur terrains déformables on emploie, couramment, les modèles proposés par Winkler et Boussinesq, modèles qui négligent l'influence exercée par l'anisotropie transversale sur l'état de tensions et de déformations des terrains.

L'anisotropie transversale des terrains peut être saisie, selon [1], dans un modèle mathématique simplifié qui opère seulement à l'aide du degré d'anisotropie n, (n étant le rapport entre le module d'élasticite horizontale, E_h, et le module d'élasticite verticale, E_v), et une seule valeur approximative du coefficient de Poisson.

Les déplacements verticaux des points situés sur la surface d'un tel milieu peuvent être obtenus des déplacements calculés dans l'hypothèse du demi-espace élastique, homogène et isotrope, multipliés d'un facteur c, exprimé en fonction des caractéristiques élastiques anisotropes. Pour une charge concentrée, P, appliquée à la surface, le déplacement sur la verticale (le tassement), s, est donné par la relation :

$$s = \frac{\varphi P}{E_v r}, \tag{1}$$

avec

$$\varphi = \frac{1}{2\pi n} \sqrt{(n - \nu_0^2)\,[n + 1 - 2\nu_0^2 + 2\sqrt{(n - \nu_0^2)(1 - \nu_0^2)}}, \quad \text{pour } n > 1, \tag{2}$$

$$\varphi = \frac{1}{2\pi n} \sqrt{n(1 - \nu_0^2)\,[n + 1 - 2\nu_0^2 + \sqrt{n(1 - n\nu_0^2)(1 - \nu_0^2)}}, \quad \text{pour } n < 1, \tag{3}$$

où : n, ν et E_v ont les significations connues, r étant la distance entre le point d'application de la force concentrée et le point considéré.

Dans le cas où $n = 1$ on retrouve la formule de Boussinesq :

$$s = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_v} \cdot \frac{P}{r}. \tag{4}$$

En comparant les relations (1) et (4) il en résulte que le facteur de multiplication a l'expression :

$$c = \frac{\pi}{1 - \nu_0^2} \varphi. \tag{5}$$

Dans ce qui suit on présente une méthode numérique de calcul des éléments linéaires et plans qui ont la section et respectivement l'épaisseur constantes (poutres et plaques rectangulaires), appuyés sur un demi-espace élastique, homogène et transversalement anisotrope et qui permet l'utilisation facile des ordinateurs.

2. Poutres à rigidité finie

Pour résoudre le problème proposé, on utilise l'équation différentielle de l'axe déformé d'une poutre à section constante, qui, selon [3], peut être écrite en différences finies pour un nombre fini de points, n, (fig. 1) et exprimée sous forme matricielle, à savoir :

$$AW + \Lambda R = CQ \quad \text{ou bien} \quad AW + \Lambda R = Q, \tag{6}$$

avec : Λ — matrice diagonale ayant les éléments égaux à λ^3/EI (λ — le pas EI — la rigidité de fléxion de la poutre) ; A, C et W, R et Q sont des matrices symétriques et respectivement des vecteurs colonne, données dans le tableau

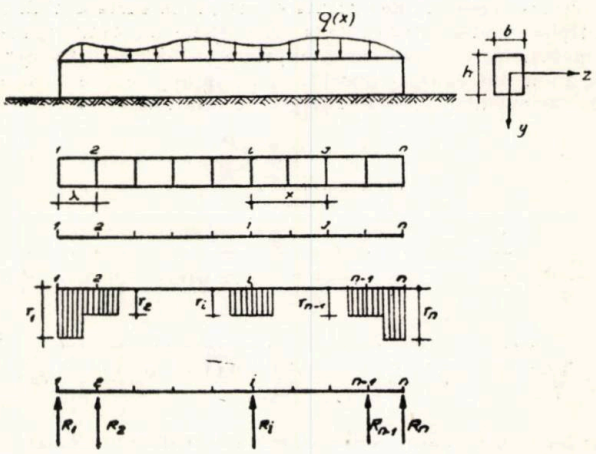


Fig. 1

1, en fonction des condition à la limite de l'élément, où w_i, R_i et q_i représentent la flèche, la réaction et respectivement la pression active du point i.

L'équation matricielle (6) contient deux vecteurs colonne, W et R, inconnus et par conséquent pour leur détermination il est nécessaire et suffisant d'établir encore une équation matricielle, en utilisant dans ce but la condition de contact.

De cette condition ($w_i \equiv s_i$), dans laquelle le milieu d'appui est considéré un demi-espace élastique, homogène et transversalement anisotrope, il en résulte que entre les flèches des poutres, w_i, et les réactions concentrées, R_i, il y existent les relations :

$$(7)\qquad \begin{cases} w_1 = \beta_{1,1}R_1 + \ldots + \beta_{1,j}\,R_j + \ldots + \beta_{1,n}\,R_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_i = \beta_{i,1}\,R_1 + \ldots + \beta_{i,j}\,R_j + \ldots + \beta_{i,n}\,R_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_n = \beta_{n,1}\,R_1 + \ldots + \beta_{n,j}\,R_j + \ldots + \beta_{n,n}\,R_n. \end{cases}$$

Les coefficients d'influence, $\beta_{i,j}$, représentent le tassement produit dans le point i par une charge uniforme ayant l'intensité $p = 1/\lambda b$, distribuée sur un rectangle (λ, b) afférent au point j, λ et b étant respectivement le pas du réseau et la largeur de la poutre.

Celles-ci se déterminent [1] à l'aide de la formule :

$$(18)\qquad \beta_{i,j} = \frac{\pi}{1-\nu_0^2}\,\varphi\beta^*_{i,j} = \frac{\varphi}{E_v\lambda}F_{i,j},$$

où : ν_0, E_v, φ et λ ont les signification connues ; $\beta^*_{i,j}$ sont les coefficients d'influence lorsque le milieu d'appui est un demi-espace élastique, homogène et isotrope (dans ce cas $\beta^*_{i,j} = \dfrac{1-\nu_0^2}{\pi E_v\lambda}F_{i,j}$ avec $F_{i,j}$ une fonction x/λ et b/λ, ses valeurs étant données dans [2], tableau II, p. 218, x étant la distance entre i et j).

Le système d'équations linéaires (7) peut être écrit sous l'une des formes matricielles:

$$(9)\qquad W = BR, \quad W = \Phi B^* R \quad \text{ou bien} \quad W = \Phi^* F R,$$

où W et R ont les signification de (6), B est une matrice symétrique ayant les éléments $\beta_{i,j}$, en représentant la matrice de flexibilité du terrain lorsque celui-ci se comporte à peu près comme un demi-espace élastique, homogène et transversalement anisotrope, β^* — une matrice symétrique ayant les éléments $\beta^*_{i,j}$ et représentant la matrice de flexibilité qui caractérise le demi-espace élastique, homogène et isotrope, Φ — une matrice diagonale ayant les

éléments $\frac{\pi}{1-\nu_0^2}\varphi$, qui prend en considération l'effet de l'anisotropie, Φ^* — une matrice diagonale ayant les éléments $\frac{\varphi}{E_v\lambda}$, F — une matrice symétrique ayant les éléments $F_{i,j}$.

Les équations matricielles (6) et (9) forment un système dont les solutions sont :

$$(10) \qquad \begin{cases} W = (A + \Lambda B^{-1})^{-1} Q, \\ R = B^{-1} (A + \Lambda B^{-1})^{-1} Q. \end{cases}$$

Ayant déterminé le vecteur R on peut calculer, selon les méthodes connues dans la mécanique des constructions, les efforts dans la poutre.

3. Plaques planes rectangulaires à épaisseur constante

Le calcul des plaques appuyées sur un demi-espace élastique homogène et transversalement anisotrope doit être conduit de la même manière que le calcul des poutres, en partant de l'équation différentielle de la surface médiane déformée de la plaque qui doit être transcrite en différences finies dans les noeuds du réseau tracé sur la surface non-deformée (fig. 2).

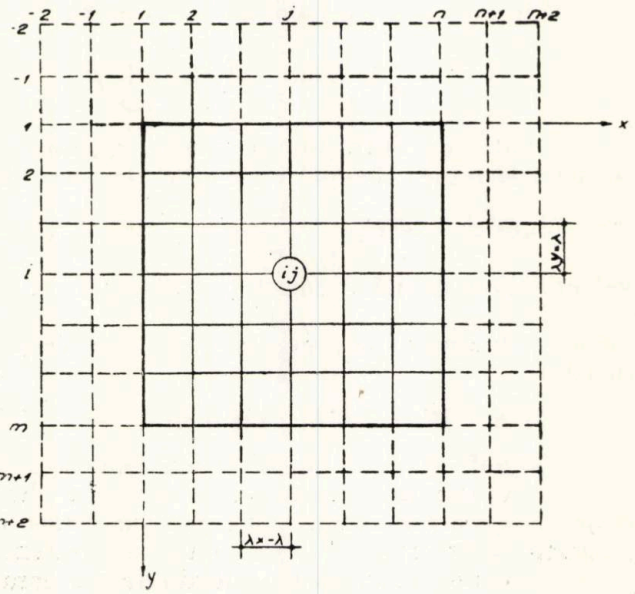


Fig. 2

Condition à la limite	A	C	W	R	Q
libre — libre	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & & 6 & -2 \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & & 1/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{n-2} \\ w_{n-1} \\ w_n \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_{n-2} \\ R_{n-1} \\ R \end{pmatrix}$	$\frac{\lambda^4}{EI}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{n-2} \\ q_{n-1} \\ q_n \end{pmatrix}$
libre — simplement appuyée	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 6 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & 6 & -4 \\ & & & & & & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{n-3} \\ w_{n-2} \\ w_{n-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_{n-3} \\ R_{n-2} \\ R_{n-1} \end{pmatrix}$	$\frac{\lambda^4}{EI}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{n-3} \\ q_{n-2} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}$
libre — incastrée	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 5 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 6 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & 6 & -4 \\ & & & & & & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{n-3} \\ w_{n-2} \\ w_{n-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_{n-3} \\ R_{n-2} \\ R_{n-1} \end{pmatrix}$	$\frac{\lambda^4}{EI}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{n-3} \\ q_{n-2} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}$
simplement appuyée — simplement appuyée	$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ & & 6 & -4 & 0 & 0 \\ & & & & & \\ & & & & 6 & -4 \\ & & & & & 5 \end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \vdots \\ w_{n-2} \\ w_{n-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ \vdots \\ R_{n-2} \\ R_{n-1} \end{pmatrix}$	$\frac{\lambda^4}{EI}\begin{pmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ \vdots \\ q_{n-2} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}$
incastrée — incastrée	$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ & & 6 & -4 & 1 & 0 \\ & & & & & \\ & & & & 6 & -4 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \vdots \\ w_{n-2} \\ w_{n-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ \vdots \\ R_{n-2} \\ R_{n-1} \end{pmatrix}$	$\frac{\lambda^4}{EI}\begin{pmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ \vdots \\ q_{n-2} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}$
simplement appuyée — incastrée	$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ & & 6 & -4 & 0 & 0 \\ & & & & & \\ & & & & 6 & -4 \\ & & & & & 7 \end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \vdots \\ w_{n-2} \\ w_{n-1} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ \vdots \\ R_{n-2} \\ R_{n-1} \end{pmatrix}$	$\frac{\lambda^4}{EI}\begin{pmatrix} q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ \vdots \\ q_{n-2} \\ q_{n-1} \end{pmatrix}$

Il en résulte un système d'équations algébriques dont la forme matricielle est :

$$AW + \Lambda R = Q, \tag{11}$$

où : A est une matrice carrée dont les lignes s'établissent conformément au molécules mathématiques de la fig. 3 (à chaque point nodal il y correspond une ligne de la matrice A ; les molécules mathématiques

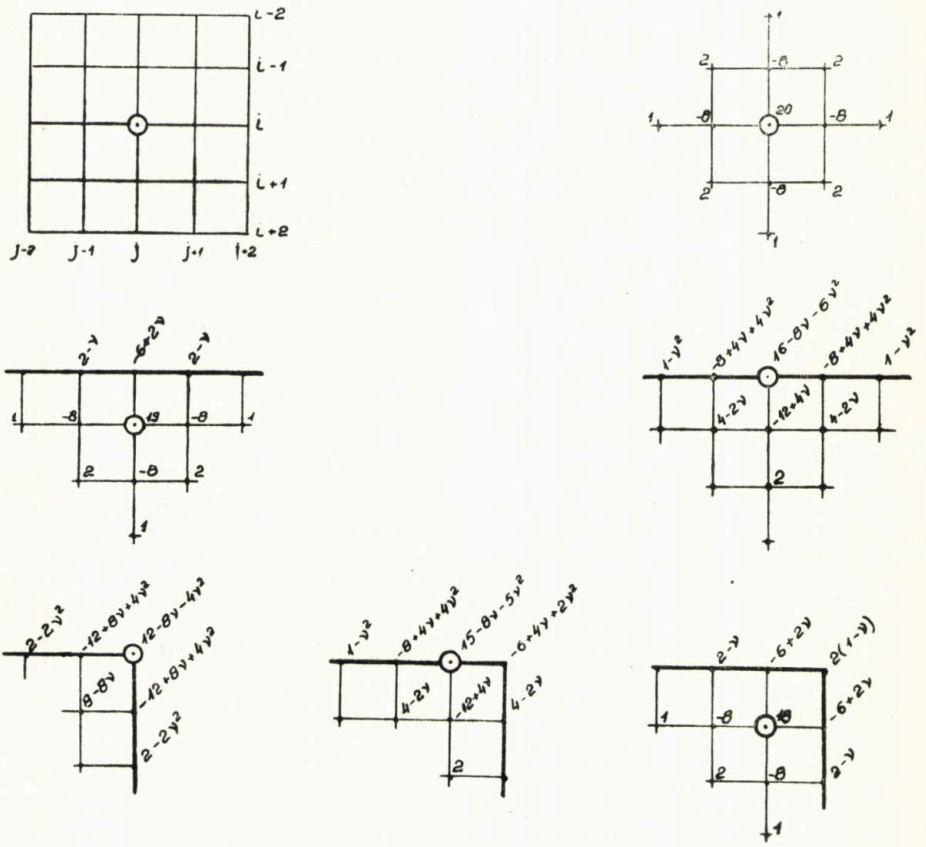


Fig. 3

sont établies pour un contour libre de la plaque, en considérant que c'est le cas le plus souvent rencontré en pratique) ; le réseau nodal a été admis rectangulaire, ayant le pas constant et égal à λ, dans les deux directions (fig. 2) ; W — vecteur colonne ayant comme éléments les flèches inconnues, $w_{i,j}$, des points nodaux de la plaque ; R — vecteur colonne

qui a comme éléments les réactions concentrées, inconnues, $R_{i,j}$, déterminées dans l'hypothèse de la distribution uniforme des pressions réactives, $r_{i,j}$, sur le champ afférent à un point nodal, (i, j), $(r_{1,1} = 4R_{1,1}/\lambda^2$, $r_{1,2} = 2R_{1,2}/\lambda^2$, ..., $r_{1,n} = 4R_{1,n}/\lambda^2$, $r_{2,1} = 2R_{1,2}/\lambda^2$, $r_{2,2} = R_{2,2}/\lambda^2$, ..., $r_{i,j} = R_{i,j}/\lambda^2$ ..., $r_{m,n-1} = 2R_{m,n-1}/\lambda^2$, $r_{m,n} = 4R_{m,n}/\lambda^2$; Λ — une matrice diagonale qui a les éléments $4\lambda^2/D$ — pour les points nodaux des coins, $2\lambda^2/D$ — pour le reste des points nodaux qui sont situés sur le contour et λ^2/D — pour les points nodaux de l'intérieur de la plaque ; Q — vecteur colonne ayant comme composantes les pressions actives, $q_{i,j}$, des points nodaux de la plaque, amplifiées avec λ^4/D, où D est la rigidité de la plaque ($D = Eh^3/12\,(1 - \nu^2)$, ν, E et h en étant le coefficient de Poisson, le module d'élasticite et respectivement l'épaisseur de la plaque).

L'équation matricielle (11) présente, de même que dans le cas des poutres, deux vecteurs colonne inconnus, W et R.

En employant la condition de contact entre la plaque et le milieu d'appui (demi-espace élastique, homogène et transversalement anisotrope) il en résulte les suivantes liaisons entre les flèches $w_{i,j}$ et les réactions concentrées $R_{i,j}$ de la plaque :

$$(12)\quad \begin{cases} w_{1,1} = \beta_{1,1;1,1} R_{1,1} + \ldots + \beta_{1,1;k,l} R_{k,l} + \ldots + \beta_{1,1;m,n} R_{m,n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_{i,j} = \beta_{i,j;1,1} R_{1,1} + \ldots + \beta_{i,j;k,l} R_{k,l} + \ldots + \beta_{i,j;m,n} R_{m,n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_{m,n} = \beta_{m,n;1,1} R_{1,1} + \ldots + \beta_{m,n;k,l} R_{k,l} + \ldots + \beta_{m,n;m,n} R_{m,n}. \end{cases}$$

Les coefficients d'influence $\beta_{i,j;k,l}$ représentent le tassement dans le point nodal (i, j) lorsque sur le champ afférent au point nodal (k, l) (pour la simplification des calculs on considère ce champ sous la forme d'un cercle ayant le rayon $\lambda/\sqrt{\pi}$) il y actionne une pression uniforme ayant l'intensité $1/\lambda^2$ [1] :

$$(13)\qquad \beta_{i,j;k,l} = \frac{\pi}{1 - \nu_0^2}\,\varphi\beta^*_{i,j;k,l} = \frac{\varphi}{E_v \lambda} F_{i,j;k,l},$$

où : ν_0, E_v, λ et φ ont les significations connues, $\beta^*_{i,j;k,l}$ sont les coefficients d'influence lorsque le milieu d'appui est un demi-espace élastique, homogène et isotrope, $F_{i,j;k,l}$ — une fonction de x/λ (x étant la distance entre les points nodaux (i, j) et (k, l)) ; les valeurs sont données dans [2], tableau III, p. 219.

L'expression matricielle du système d'équations (12) est la suivante :

$$(14)\qquad W = BR,\ W = \Phi B^* R \text{ ou bien } W = \Phi^* F R,$$

où : W et R ont les signification de (11), B, B^* et F sont des matrices symétriques qui ont les éléments égaux aux coefficients $\beta_{i,j;k,l}$, $\beta^*_{i,j;k,l}$ et res-

pectivement $F_{i,j;k,l}$ du système d'équations (12), Φ et Φ^* sont des matrices diagonales ayant comme éléments $\frac{\pi}{1-\nu_0^2}\varphi$ et respectivement $\frac{\varphi}{E_v\,\lambda}$.

Les vecteurs-colonne W et R peuvent être déterminés par la résolution du système d'équations matricielles (11) et (14). Les solutions de ce système sont :

$$W = (A + \Lambda B^{-1})^{-1}\,Q, \qquad R = B^{-1}\,(A + \Lambda B^{-1})^{-1}\,Q. \tag{15}$$

Les vecteurs W et R étant connus, ils permettent la détermination de l'état de tension et de déformation dans la plaque.

4. Conclusions

La méthode proposée permet le calcul des éléments linéaires et plans appuyés sur terrains déformables qui se comportent à peu près comme un demi-espace élastique, homogène et transversalement anisotrope, en employant une matrice de flexibilité qui caractérise le milieu d'appui et la méthode des différences finies. Les éléments des matrices s'établissent à la suite de quelques calculs simples et la forme matricielle facilite la programmation des calculs par ordinateurs.

La méthode peut être développée en l'employant aussi pour le calcul des poutres et des plaques qui ont la rigidité variable.

Reçuele 17 août 1972

Institut Polytechnique, Jassy,
Chaire de Constructions hydrotechniques

BIBLIOGRAPHIE

1. Eftimie Al., *Contribuţie la studiul stării de tensiuni a deplasărilor şi tasărilor în terenurile de fundaţie anizotrope şi neomogene elastic.* Thèse, Inst. Polyt. Jassy, 1971.
2. Жемочкин Д. Н., Синицын А. П., *Практические методы расчета фундаменты балок и плит но упругом основании.* Госстроиздат, М., 1962.
3. Ungureanu N., Ionescu I., *Une méthode numérique de calcul des poutres et des plaques appuyées sur un milieu élastique, homogène et isotrope.* Bul. Inst. polit. Iaşi, s. V, XVII (XXI), *3—4* (1971).

CALCULUL ELEMENTELOR DE CONSTRUCŢII LINIARE ŞI PLANE REZEMATE PE UN SEMISPAŢIU ELASTIC, OMOGEN ŞI TRANSVERSAL ANIZOTROP

(Rezumat)

Se prezintă o metodă de calcul a elementelor de construcţii de tip grindă şi placă rezemate pe un semispaţiu elastic, omogen şi transversal anizotrop. În acest scop se foloseşte metoda diferenţelor finite şi o matrice de flexibilitate care caracterizează mediul de rezemare. Forma matriceală permite efectuarea cu uşurinţă a calculelor la ordinatoare.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAȘI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secția V
CONSTRUCȚII. ARHITECTURĂ

C. Z. 526

DETERMINAREA PUNCTELOR DUBLE CU AJUTORUL CALCULULUI VECTORIAL ȘI AL NUMERELOR COMPLEXE

DE

EUGEN POPA

1. Într-o lucrare anterioară [4] s-a arătat modul în care se pot utiliza calculul vectorial și numerele complexe la rezolvarea unor probleme din domeniul geo-topografic, mai ales la obținerea coordonatelor punctelor determinate pe bază de măsurări de unghiuri orizontale.

Folosind operațiile elementare cu vectori în plan — adunare, scădere, înmulțire — și exprimarea relațiilor vectoriale prin numere complexe sub formă trigonometrică, analitică și exponențială, se ajunge la o metodologie de calcul nouă, care se dovedește a fi avantajoasă în diverse situații.

Se reamintește, de asemenea, că metodologia a fost adaptată pentru calculul coordonatelor în sistemul G a u s s-K r ü g e r.

2. În cazul determinării punctelor duble, destul de frecvente în practică, dar oarecum evitate, întrucît implică un calcul mai anevoios, utilizarea noului mod de lucru poate fi apreciată ca destul de elegantă și avantajoasă.

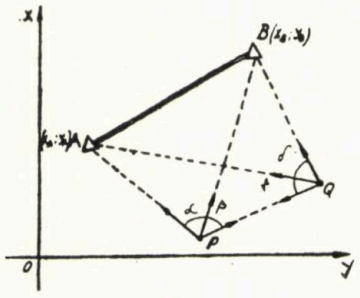


Fig. 1

Fiind cunoscute două puncte inaccesibile, $A\,(X_A\,,\ Y_A)$ și $B\,(X_B\,,\ Y_B)$, se măsoară la teren unghiurile în noile puncte P și Q care se determină și cărora urmează a li se calcula coordonatele rectangulare. Modul de obținere a coordonatelor este efectuat în următoarele etape :

a) În primul rînd se efectuează operaţiile cu vectori :

$$(1) \qquad Z_{QA} = Z_{QP}\lambda e^{i\gamma}, \quad Z_{QB} = Z_{QA}\mu e^{i\delta},$$

$$(2) \qquad Z_{AB} = Z_{QB} - Z_{QA},$$

$$(2') \qquad Z_{AB} = Z_{QA}\mu e^{i\delta} - Z_{QA} = Z_{QA}(\mu e^{i\delta} - 1),$$

$$(2'') \qquad Z_{QA} = \frac{Z_{AB}}{\mu e^{i} - 1}, \quad Z_{QB} = \frac{Z_{AB}\mu e^{i\delta}}{\mu e^{i\delta} - 1}.$$

Se determină şi Z_{PQ} pentru a stabili o legătură între λ şi μ din relaţia (1) :

$$(3) \qquad Z_{QP} = \frac{Z_{QA}}{\lambda e^{i\gamma}}, \quad Z_{QP} = \frac{Z_{AB}}{(\mu e^{i\delta} - 1)\lambda e^{i\gamma}}.$$

b) Se determină apoi parametrii λ şi μ, folosind expresiile de mai sus. Aceste expresii conţin unghiurile γ şi δ ; efectuînd raportul numerelor (vectorilor), se ajunge la obţinerea tangentei unghiului dintre vectori (dacă se consideră raportul dintre coeficientul părţii imaginare şi partea scalară:

$$(4) \qquad \frac{Z_{PQ}}{Z_{PA}} \to \operatorname{tg}(\alpha + \beta) \text{ şi } \frac{Z_{PQ}}{Z_{PB}} \to \operatorname{tg}\beta,$$

încît

$$(4_1) \qquad Z_{PA} = Z_{QA} - Z_{QP} = \frac{Z_{AB}}{\mu e^{i\delta} - 1} - \frac{Z_{AB}}{(\mu e^{i\delta} - 1)\lambda e^{i\gamma}} = \frac{Z_{AB}(\lambda e^{i\gamma} - 1)}{(\mu e^{i\delta} - 1)\lambda e^{i\gamma}},$$

$$(4_1') \qquad Z_{PB} = Z_{QB} - Z_{QP} = \frac{Z_{AB}\mu e^{i\delta}}{\mu e^{i\delta} - 1} - \frac{Z_{AB}}{(\mu e^{i\delta} - 1)\lambda e^{i\gamma}} = \frac{Z_{AB}(\lambda e^{i\gamma}\mu e^{i\delta} - 1)}{(\mu e^{i\delta} - 1)\lambda e^{i\gamma}}.$$

Cu valorile (4_1) şi $(4_1')$ relaţiile (4) devin :

$$(4_2) \qquad \frac{Z_{PQ}}{Z_{PA}} = \frac{1}{1 - \lambda e^{i\gamma}} \text{ şi } \frac{Z_{PQ}}{Z_{PB}} = \frac{1}{1 - \lambda e^{i\gamma}\mu e^{i\delta}}.$$

Se recurge la un artificiu de calcul înmulţind cele două rapoarte cu conjugatul numitorului ; se obţine :

$$(4_2'') \qquad \frac{1 - \lambda e^{-i\gamma}}{1 - \lambda^2} \text{ şi } \frac{1 - \lambda e^{-i\gamma}\mu e^{-i\delta}}{1 - \lambda^2\mu^2}.$$

Se exprimă numărătorul sub formă trigonometrică şi efectuînd raportul componentelor din (4_2) rezultă :

$$(5) \qquad \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\lambda \sin\gamma}{1 - \lambda\cos\gamma} \text{ şi } \operatorname{tg}\beta = \frac{\mu\lambda\sin(\gamma + \delta)}{1 - \mu\lambda\cos(\gamma + \delta)}.$$

Din relațiile astfel obținute se pot determina λ și μ:

$$\lambda = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}, \qquad \mu = \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma+\delta)}. \tag{6}$$

c) Coordonatele punctului Q vor fi obținute din expresiile în complex ale vectorilor. Anume, efectuînd media celor două valori:

$$\begin{cases} Z_Q = Z_A + Z_{AQ} = Z_A + \dfrac{Z_{AB}}{1-\mu e^{i\delta}}, \\ Z_Q = Z_B + Z_{BQ} = Z_B + \dfrac{Z_{AB}\,\mu e^{i\delta}}{1-\mu e^{i\delta}}, \end{cases} \tag{7}$$

se obține:

$$Z_Q = \frac{Z_A+Z_B}{2} + \frac{Z_{AB}}{2}\cdot\frac{1+\mu e^{i\delta}}{1-\mu e^{i\delta}}. \tag{8}$$

Dar

$$\frac{1+\mu e^{i\delta}}{1-\mu e^{i\delta}} = \frac{(1+\mu e^{i\delta})(1-\mu e^{i\delta})}{(1-\mu e^{i\delta})(1-\mu e^{i\delta})} = \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2-2\mu\cos\delta} + i\frac{2\mu\sin\delta}{1+\mu^2-2\mu\cos\delta} = m+in, \tag{9}$$

unde:

$$m = \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2-2\mu\cos\delta}, \quad n = \frac{2\mu\cos\delta}{1+\mu^2-2\mu\cos\delta}. \tag{10}$$

Rezultă pentru coordonatele punctului Q expresiile:

$$\begin{cases} X_Q = \frac{1}{2}[X_A + X_B + (X_B - X_A)\,m - (Y_B - Y_A)\,n], \\ Y_Q = \frac{1}{2}[Y_A + Y_B + (Y_B - Y_A)\,m + (X_B - X_A)\,n]. \end{cases} \tag{11}$$

Coordonatele punctului P se calculează în mod similar, rezultînd:

$$Z_P = Z_A + Z_{AP}, \quad Z_P = Z_B + Z_{BP}, \tag{12}$$

adică

$$Z_P = \frac{Z_A+Z_B}{2} + \frac{Z_{AB}}{2}\left[\frac{\lambda e^{i\gamma} - 2 + \lambda e^{i\gamma}\mu e^{i\delta}}{\lambda e^{i\gamma}(1-\mu e^{i\delta})}\right], \tag{12'}$$

obținînd în cele din urmă expresii analoge celor ale coordonatelor punctului Q.

O altă posibilitate este aceea de a calcula m' și n' în mod analog cu m și n, folosind unghiurile corespunzătoare din P :

$$m' = \frac{1 - \mu'^2}{1 + \mu'^2 - 2\mu' \cos \alpha}, \quad n' = \frac{2\mu' \sin \alpha}{1 + \mu'^2 - 2\mu' \cos \alpha}, \tag{13}$$

unde

$$\mu' = \frac{\sin(\beta + \gamma + \delta) \sin \gamma}{\sin(\gamma + \delta) \sin(\gamma + \beta + \alpha)}. \tag{13'}$$

3. Rezolvarea unui exemplu practic se desfășoară fie :

a) din aproape în aproape (eventual sistematizat în tabel), parcurgînd următoarele etape : 1° se calculează μ, μ^2, $\mu \sin \delta$, $\mu \cos \delta$; 2° se calculează m și n ; 3° se calculează X_Q , Y_Q ; 4° se repetă etapele precedente pentru determinarea coordonatelor punctului P;

b) fie printr-un calcul cumulat cu mașina de calcul. În acest scop : 1° se calculează μ, μ^2, $\mu \sin \delta$, $\mu \cos \delta$ și numitorul $K = 1 + \mu^2 - 2\mu \cos \delta$; 2° se efectuează calculul cumulat, asemănător celui utilizat la determinarea coordonatelor prin metoda intersecției înainte.

4. Noul mod de calcul prezintă o serie de avantaje care conduc la micșorarea timpului de lucru prin înlăturarea unor calcule intermediare care intervin, în număr mare, la alte metode cunoscute în producție și anume :

a) Nu se mai calculează unghiurile necunoscute utilizate la calculul orientărilor direcțiilor spre punctele de determinat.

b) Nu se mai calculează orientările acelor direcții, calculul coordonatelor făcîndu-se direct.

Primită la 17 octombrie 1971

Institutul politehnic, Iași,
Laboratorul de topografie
și geodezie

BIBLIOGRAFIE

1. Borș C., Borș D., *Numere complexe.* Ed. Tehn., Buc., 1962.
2. Bonea I., *Topografie Generală.* Ed. Centr. Stud., Timișoara, 1950.
3. Filimon R. ș. a., *Topografie Generală.* Ed. Tehn., Buc., 1968.
4. Popa E., *L'utilisation des nombres complexes à la résolution des problèmes de topographie.* Bul. Inst. polit. Iași, XI (XV), *1 — 2* (1965).

CALCUL DES POINTS DOUBLES À L'AIDE DU CALCUL VECTORIEL ET DES NOMBRES COMPLEXES

(Résumé)

On propose un procédé inédit de résolution du problème des points doubles (Hansen) en utilisant les opérations élémentaires connues en calcul vectoriel et les formes de présentation des vecteures.

Les expressions obtenues sont plus simples que celles qui utilisent directement les angles des diréctions calculées.

Les formules peut être adaptées au calcul à l'aide des machines de calcul.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secţia V
CONSTRUCŢII. ARHITECTURĂ

C.Z. 624.1

STUDIUL VARIAŢIILOR SEZONIERE DE VOLUM ALE STRATULUI DE FUNDARE DIN LUNCA RÎULUI BAHLUI ŞI INFLUENŢA ACESTORA ASUPRA COMPORTĂRII CONSTRUCŢIILOR

NOTA II
CONTRIBUŢII LA STUDIUL CHIMICO-MINERALOGIC AL STRATULUI DE FUNDARE DIN LUNCA RÎULUI BAHLUI

DE

TUDOR SILION, N. BOŢI şi ELISABETA IVĂŞCANU

1. Introducere

Pămînturile, ca teren de fundaţie sau ca material pentru construcţiile din pămînt, sînt acumulări de particole solide de dimensiuni variabile şi în general de naturi diferite, între care se dezvoltă — pe suprafeţele de rezemare — forţe de coeziune slabe sau chiar nule. În mod obişnuit, pămînturile nesaturate sînt sisteme trifazice, fazele solidă, lichidă şi gazoasă fiind reprezentate respectiv de particole solide, cel mai adesea de origină minerală, apă şi aer.

Apa şi aerul ocupă spaţiul determinat de porii fazei solide.

În pămînturile saturate la care porii sînt complet umpluţi cu apă (lipseşte faza gazoasă) sistemul este bifazic.

Experienţa arată că deformaţia pe care o capătă un masiv de pămînt este însoţită de variaţia rapoartelor volumetrice ale fazelor componente iar mărimea care caracterizează fazele pămîntului sub raport cantitativ are o mare importanţă atît pentru practică cît şi pentru calculele teoretice fundamentale. Cunoaşterea acestor caracteristici şi a mărimilor ce se deduc prin calcul pe baza valorilor cifrice, permite să se caracterizeze în bună măsură proprietăţile constructive ale pămînturilor.

În geotehnică condiţiile de umiditate ale pămîntului reprezintă, în marea majoritate a cazurilor, factorul determinant care influenţează proprietăţile sale mecanice, sub încărcările transmise de construcţii pe terenul de fundaţii. Comportarea pămînturilor sub acţiunea sarcinilor este caracterizată de fenomene cu mult mai complexe decît cele care se produc în materialele de construcţii, curent întîlnite în lucrările inginereşti. Rezistenţa pămînturilor la tăiere, compresibilitatea, *umflarea* sau *contracţia*, capacitatea de compactare, tasare suplimentară prin umezire precum şi alte aspecte legate de comportarea pămînturilor ca teren de fundaţie sau ca material pentru construcţiile de pămînt, sînt condiţionate în mod hotărîtor de starea de umiditate a acestuia.

Atît deformaţiile cît şi presiunile care se dezvoltă cu ocazia fenomenului de contracţie dintre apă şi scheletul solid al pămînturilor vor depinde de toţi factorii care influenţează

această interacțiune și anume: compoziția chimico-mineralogică, analiza granulometrică, conținutul în coloizi, capacitatea de schimb, conținutul de electroliți al apei din pori, structura stării de îndesare și umiditatea inițială.

În ceea ce privește influența compoziției mineralogice, datele publicate în literatura de specialitate [1] arată că cu cît o argilă are un conținut mai ridicat de montmorillonit cu atît prezintă fenomene de contracție și umflare mai accentuate și dezvoltă presiuni de umflare mai însemnate. În comparație cu halloisitul, un mineral din grupa caolinitului, montmorillonitul se umflă de circa 40 ori mai mult.

Natura cationilor de schimb exercită, de asemenea, o influență deosebită asupra capacității de umflare a pămînturilor. Astfel, cercetările lui Mielenz au arătat că Na-montmorillonitul prezintă o umflare de circa 14 ori mai mare decît Ca-montmorillonitul.

De asemenea conținutul de electroliți în apa din pori influențează mărimea umflării pămînturilor.

2. Date de teren

Probele au fost recoltate din trei puncte diferite, din fiecare punct fiind extrase cîte 5 probe și anume: P_1 (1, 2, 3, 4, 5), în incinta uzinei de fibre sintetice, P_2 (1, 2, 3, 4, 5), în zona hipodromului, P_3 (1, 2, 3, 4, 5), în zona Podul de Piatră. Probele au fost extrase de la cotele 1, 2 și respectiv 3 m.

Scopul urmărit a fost acela de a determina natura mineralogică a argilei din stratul de fundare din lunca rîului Bahlui, prin metode geochimice.

La cercetarea geochimică s-au avut în vedere următoarele criterii: analizele chimice și raportul componenților, reacțiile de culoare, analiza termică diferențială și fotografii la microscopul electronic.

Determinările au fost efectuate asupra unui număr de 14 probe.

Rezultatele analizelor chimice pentru elementele majore sînt consemnate în tabelul 1. Din aceste analize rezultă următoarele observații:

a) Principalele componente chimice ale acestor roci sînt SiO_2 și Al_2O_3.

b) Determinarea raportului molecular SiO_2/Al_2O_3, a fiecărei probe în parte, poate furniza unele sugestii în legătură cu natura argiloasă a mineralului component, deoarece simpla determinare cantitativă a SiO_2 și Al_2O_3 nu permite o comparare justă a acestora. Astfel, se pun în evidență: 1° $SiO_2/Al_2O_3 = 1$, alophan; 2°=SiO_2/Al_2O_3=2, caolinit halloysit, muscovit, pirophylit; 3° $SiO_2/Al_2O_3 = 3$, beidelit; 4° $SiO_2/Al_2O_3 = 4$, hidromică; 5° $SiO_2/Al_2O_3 = 5$, montmorillonit; 6° SiO_2/Al_2O_3=6, felspat alcalin, biotit.

În diagrama triunghiulară SiO_2—Al_2O_3—Fe_2O_3 (fig. 1), unde pe latura SiO_2—Al_2O_3 din triunghiul de proiecție se reprezintă raporturile moleculare corespunzătoare, argilele montmorillonitice se încadrează în limitele 4...5 și sînt prezentate în tabelul 2.

Un alt component al rocilor îl constituie Fe_2O_3. Conținutul de oxid de fier influențează asupra calității argilelor. Referindu-ne la cele 14 probe, acestea au un conținut redus de Fe_2O_3, cuprins între 2,20 și 4,77%.

Tabelul 1

Analize chimice

Nr. crt.	Denumirea	SiO_2 %	Al_2O_3 %	Fe_2O_3 %	CaO %	MgO %	Na_2O %	K_2O %	H_2O %	Pierderi calcinare %	Total %
1	Proba nr. *1*	53,00	19,22	3,33	5,69	1,46	0,063	1,81	5,14	10,46	100,07
2	Proba nr. *3*	53,51	17,92	4,77	5,38	2,54	0,074	2,02	5,18	8,63	100,02
3	Proba nr. *4*	56,06	17,20	4,44	5,58	2,36	0,45	1,78	3,68	9,31	100,10
4	Proba nr. *5*	54,20	18,36	4,53	5,62	1,53	0,40	2,03	3,98	10,01	100,38
5	Proba nr. *6*	53,19	21,37	2,79	4,75	1,03	0,36	1,81	5,29	9,51	100,10
6	Proba nr. *7*	52,06	19,20	2,82	5,65	2,19	0,038	1,54	6,17	10,34	100,00
7	Proba nr. *8*	51,49	19,80	2,80	8,25	2,08	0,36	2,21	5,07	8,47	100,53
8	Proba nr. *9*	51,06	20,02	2,52	6,96	1,37	0,81	2,31	5,22	9,82	100,09
9	Proba nr. *10*	54,10	18,90	2,80	6,80	1,30	0,43	1,92	5,37	8,79	100,00
10	Proba nr. *11*	51,32	18,50	2,64	7,80	2,02	0,28	1,59	5,10	10,87	100,12
11	Proba nr. *12*	56,63	18,70	2,24	5,22	1,28	0,57	1,81	5,75	7,88	100,08
12	Proba nr. *13*	53,67	18,02	2,94	7,27	1,45	0,26	1,65	4,90	10,29	100,45
13	Proba nr. *14*	54,00	18,52	3,14	5,36	1,56	0,32	1,56	6,08	9,53	100,14
14	Proba nr. *15*	53,91	19,80	2,20	4,70	1,08	0,37	1,59	6,15	10,28	100,09

Tabelul 2

Chimismul argilelor

Nr. crt.	Denumirea probei	SiO_2 %	Al_2O_3 %	SiO_2/Al_2O_3 molecular	Pierderi calcinare %
1	Proba nr. *1*	53,00	19,20	4,70	10,46
2	Proba nr. *3*	53,51	17,92	5,00	8,63
3	Proba nr. *4*	56,06	17,20	5,40	9,31
4	Proba nr. *5*	54,20	18,36	5,00	10,01
5	Proba nr. *6*	53,19	21,37	4,10	9,51
6	Proba nr. *7*	52,06	19,20	4,60	10,34
7	Proba nr. *8*	51,49	19,81	4,40	8,47
8	Proba nr. *9*	51,06	20,02	4,30	9,82
9	Proba nr. *10*	54,10	18,90	4,80	8,79
10	Proba nr. *11*	51,32	18,50	4,70	10,87
11	Proba nr. *12*	56,63	18,70	5,10	7,88
12	Proba nr. *13*	53,67	18,02	5,00	10,29
13	Proba nr. *14*	54,00	18,52	5,00	9,53
14	Proba nr. *15*	53,91	19,80	4,60	10,28

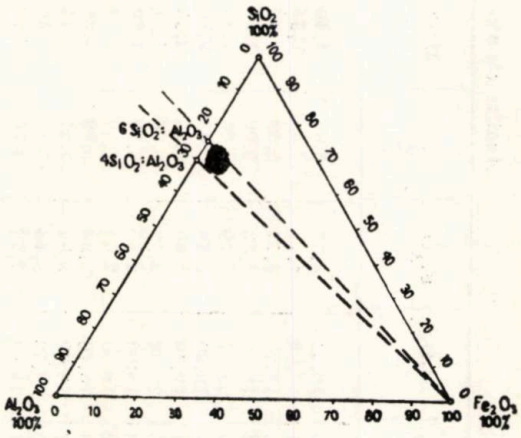


Fig. 1. — Diagrama triunghiulară $SiO_2-Al_2O_3-Fe_2O_3$.

3. Reacţii de culoare

Pentru precizarea tipului de mineral argilos (conţinutul în probele de argilă) s-au efectuat reacţii de culoare după metoda propusă de H. I. Vedeneeva şi M. F. Vikulova [2], folosind crisoidină în mediu neutru şi în soluţie clorhidrică, albastru de metilen în mediu neutru şi în mediu de KCl precum şi benzidina în mediu neutru şi alcalin.

Rezultatele obţinute sînt indicate în tabelul 3.

Tabelul 3

Reacții de culoare

Nr. crt	Denumirea probei	Crisoidină		Benzidină		Albastru de metilen		Tipul mineralului argilos
		mediu apos	mediu HCl	mediu apos	mediu NH_4OH	fără KCl	cu KCl	
1	Proba nr. *1*	galben	sediment cărămiziu sol. incoloră	albastru	albastru murdar	violet albastru	verde albastru	montmorillonit
2	Proba nr. *3*	galben	sediment cărămiziu sol. incoloră	albastru	albastru murdar	violet albastru	verde albastru	montmorillonit
3	Proba nr. *4*	galben	sediment cărămiziu sol. incoloră	albastru	albastru murdar	violet albastru	verde albastru	montmorillonit
4	Proba nr. *5*	galben	sediment cărămiziu sol. incoloră	albastru	albastru murdar	violet albastru	verde albastru	montmorillonit
5	Proba nr. *6*	galben	sediment cărămiziu sol. galbenă	albastru deschis	albastru murdar	albastru	azuriu	hidromică
6	Proba nr. *7*	galben	sediment cărămiziu sol. galbenă	albastru deschis	albastru murdar	albastru	azuriu	hidromică
7	Proba nr. *8*	galben	sediment cărămiziu sol. galbenă	albastru deschis	albastru murdar	albastru	azuriu	hidromică
8	Proba nr. *9*	galben	sediment cărămiziu sol. galbenă	albastru deschis	albastru murdar	albastru	azuriu	hidromică
9	Proba nr. *10*	galben	sediment cărămiziu sol. incoloră	albastru	albastru murdar	violet albastru	verde albastru	montmorillonit
10	Proba nr. *11*	galben	sediment cărămiziu sol. incoloră	albastru	albastru murdar	violet albastru	verde albastru	montmorillonit
11	Proba nr. *12*	galben	sediment cărămiziu sol. incoloră	albastru	albastru murdar	violet albastru	verde albastru	montmorillonit
12	Proba nr. *13*	galben	sediment cărămiziu sol. incoloră	albastru	albastru murdar	violet albastru	verde albastru	montmorillonit
13	Proba nr. *14*	galben	sediment cărămiziu sol. incoloră	albastru	albastru murdar	violet albastru	verde albastru	montmorillonit
14	Proba nr. *15*	galben	sediment cărămiziu sol. incoloră	albastru	albastru murdar	violet albastru	verde albastru	montmorillonit

După cum rezultă din tabelul 3, reacţiile de culoare indică prezenţa montmorillonitului şi a hidromicei.

4. Microscopie electronică

Pentru verificarea determinărilor efectuate prin metoda reacţiilor de culoare s-au executat fotografii la microscopul electronic BS —513 A Tesla, folosind aceleaşi fracţiuni fine ale probelor *1...14*.

Prin compararea cu microfotografiile publicate de către G r i m [3] se poate identifica prezenţa mineralelor din grupa hidromicelor şi a montmorillonitului.

5. Analiza termo-diferenţială

Curbele termo-diferenţiale (fig. 5) obţinute pe argilele de pe şesul Bahluiului, la derivatograful de tip OD-102- Paulik Erdey, prezintă trei picuri endoterme, la temperaturile de 140°...170°C, 540°...580°C şi 810°... ...900°C.

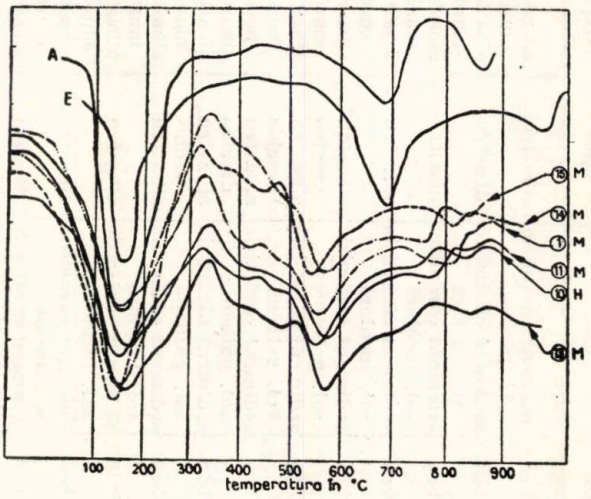


Fig. 5. — Curbele de analiză termică diferenţială a unor argile din şesul rîului Bahlui—Iaşi, cu conţinut de hidromică şi preponderenţă montmorillonitică: *A* — montmorillonit, Otay California; *E* — hidromică, zona Grundi.

Primul pic endoterm (140°...170°C) se datoreşte pierderii apei de hidratare. Al doilea pic endoterm este consecinţa pierderii apei legate chimic, care se manifestă în jur de 580°C, iar al treilea pic endoterm, care apare între 800°...900°C, este mai puţin intens şi se poate datora plecării ultimelor grupe hidroxil.

Fig. 2. — Montmorillonit.

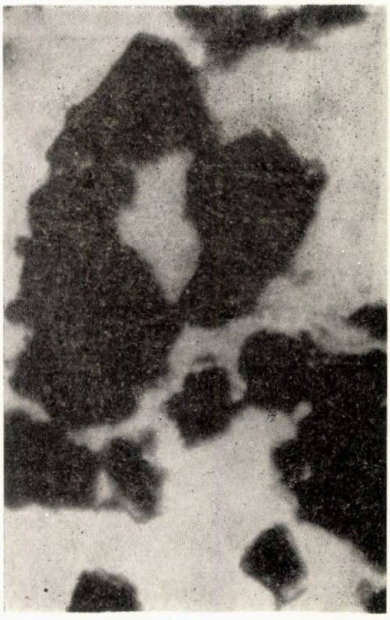


Fig. 3. — Hidromică.

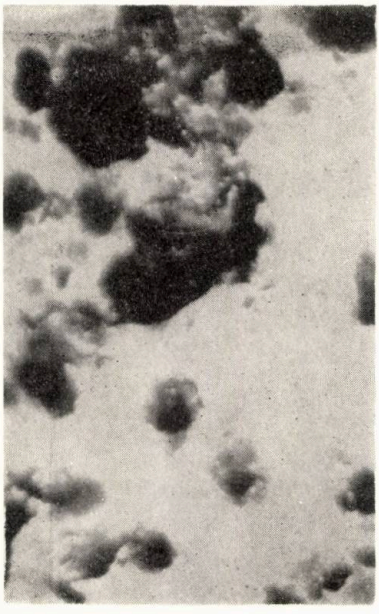


Fig. 4. — Montmorillonit.

Picurile endoterme de la 160°...170°C și 580°C, indică prezența mineralelor din clasa hidromicelor, iar cel de al treilea pic endoterm, (800°...900°C), indică prezența montmorillonitului (fig. 6 [4]).

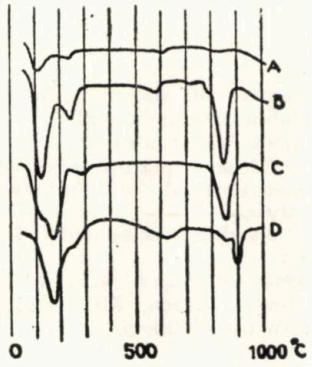


Fig. 6. — Curbe de analiză termică diferențială a unor argile: *A* — material gri din localitatea Veo; *B* — material deschis la culoare din localitatea Veo; *C* — montmorillonit din Krugersdorp, Transvaal, Africa de Sud (Schmidt și Heystek, 1953), redesenat la scară; *D* — montmorillonit din Cathkin Braes, Glasgow, Scoția (Faust, 1951), redesenat la scară.

Curbele din fig. 5 au fost comparate cu curbele *A* și *E*, din aceeași figură, considerate etalon, date de R. E. Grim [3], precum și cu cele date de J. Moum [4], (fig. 6).

6. Concluzii

În urma cercetărilor geochimice efectuate asupra stratului de fundare din lunca rîului Bahlui, se desprind următoarele concluzii:

1° Complexul argilos conține două tipuri principale de roci: hidromică și montmorillonit.

2° Raportul SiO_2/Al_2O_3 se situează, pentru această regiune, între limitele 4...5 datorită identității compușilor argiloși.

3° Prin reacțiile de culoare, microscopie electronică și analiză termodiferențială, se constată că mineralele argiloase predominante conținute în argilele cercetate sînt din grupa montmorillonitului și a hidromicei.

Primită la 15 octombrie 1972

Institutul politehnic, Iași,
Catedra de geotehnică și fundații

BIBLIOGRAFIE

1. Silvan A., *Apa în pămînturile nesaturate.* Ed. Tehn., Buc., 1967.
2. Веденеева Н. Е., Викулова М. Ф., *Метод исследования глинистых минералов с помощью красителей и его применение в литологии.* Госеологиздат, М., 1952.
3. Грим Р. Е., *Минералолия длины.* М., 1959.
4. Moum J., Sopp O. I., *Saponite from Veo, Jotunheimen.* Norwegian Geotechnical Inst., Publication nr. *59* (1964).

UNTERSUCHUNG VON JÄHRLICHE VOLUMEN ÄNDERUNGEN DER LAGERUNGSSCHICHT IM BAHLUIFLUSSTAL UND DEREN EINFLUSS AUF DEN BAUWERKEN

II. Beiträge zum chemisch-mineralogischen Studium der Lagerungsschicht im Bahluiflusstal

(Zusammenfassung)

In der vorliegenden Arbeit werden einige chemische und mineralogische Eigenschaften des Bodens, welcher die Lagerungsschicht im Bahluiflusstal darstellte, untersucht. Die Tonproben stammen aus einer westlich von „Fabrica de antibiotice" — Werk und ostlich wom Dorf Dancu begrenzten Zone. Die durchgeführte experimentalle Laborwersuchen betreffen: chemische Analysen der mineralogischen Bestandteilen, Farbreaktionen, Thermodifferentielle- und Elektronenmikroskopie Analysen.

Auf Grund dieser Untersuchungen wurde festgestellt dass, bis zu einer Tiefe von 3,00 m, die Tonerde von Montmorillonit'schen Typ ist.

In Zusammenhang mit den jährlichen Feuchtigkeitsänderungen wird dieser hohe Montmorillonitsgehalt der Tonerde für Volumenänderungen führen, die schädlich auf die Lagerungsschicht der hier vorhandenen Bauten, einwirken können.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secţia V
CONSTRUCŢII. ARHITECTURĂ

D. C. 691.5 ; 666.8/9 ; 534

ULTRASONIC MEASURING DURING SETTING OF GYPSUM PLASTER

BY

JOACHIM GENSEL

It is well known that strength development in hardened concrete can be investigated by means of measuring ultrasonic pulse velocity. Such tests, however, were mainly started after cement hydration. Only few authors measured pulse velocity in concrete during hydration of the cement phase. The author, however, applied this method to the investigation of hardening, especially of Plaster of Paris. It appears that the development of the ultrasonic impulse velocity affords a very significant characterisation of the process of hydration. Both, the induction period and the maximum rate of hydration can be established accurately from the continuous measuring results. In comparison with conventional methods, the ultrasonic method enables one to obtain important technological data about the increase of strength during hardening process. There is a very good opportunity of investigating the influence of accelerating and retarding admixtures. Figure 1 shows the relation between ultrasonic pulse velocity and time of hydrating gypsum plaster with graduated addition of $KHSO_4$. The admixture of this salt effects already at low concentrations an important shortening of the induction period and an increase of the velocity of stiffening. Index for the influence on the induction period is the time by which ultrasonic velocity reaches 500 m/s. The velocity of stiffening represented by the gradient of the graph $S = \Delta v/\Delta t$, taken in a linear range mostly between $v = 1\,500$ m/s and $v = 500$ m/s. Finally, the velocity reached after 90 min is taken to express the strength at the end ef hydration. These three terms (A, B and C) are plotted against concentration of $KHSO_4$ in Figure 2.

Very interest results were found investigating α - $CaSO_4 \cdot \frac{1}{2}\ H_2O$ at large water-plaster-ratios (Fig.3). After a time, which grows with rising water-plaster-ratio, the increase of ultrasonic velocity stops and for a short time it falls off. After a further 2 to 5 min the strength of the gypsum plas-

ter rises again, but does not always reach the previous maximum. It can be supposed that the crystal skeleton (consisting of long tapering needles) is transformed by the surplus rest water. At the crystaltips dihydrate dis-

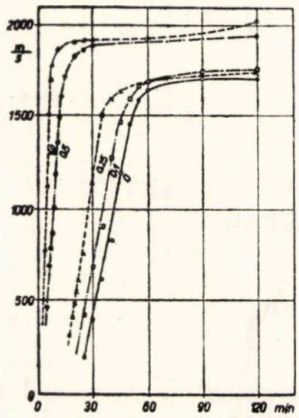


Fig. 1

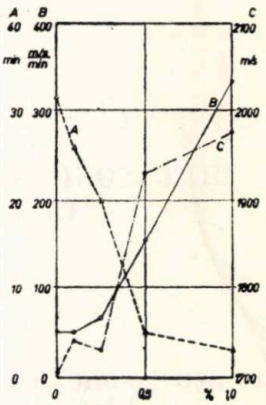


Fig. 2

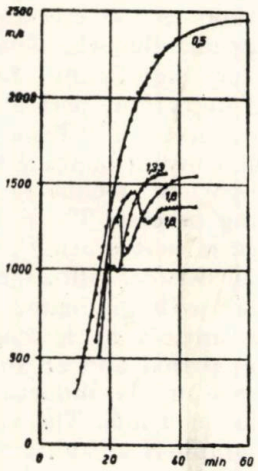


Fig. 3

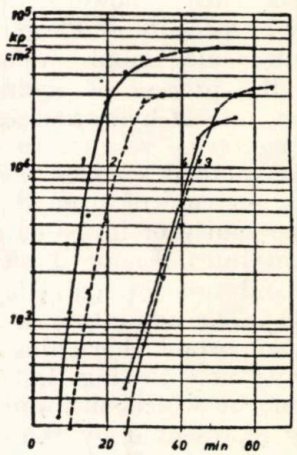


Fig. 4

solves on account of the higher pressure of solution and then settles down on the crystal faces where solution is oversaturated. Consequently a part of the crystal skeleton-contacts disappear, causing an irreversible reduction of strength. This observation was also made on other conditions by Segalowa [3], Fischer [4] and Wandser [5].

By means of measuring two different ultrasonic velocities, for instance the longitudinal wave and the Rayleigh-wave, it is possible to determine the dynamic modulus, eliminating Poisson's ratio from the following equations :

$$\frac{v_R}{v_L} = (0{,}87 + 1{,}12\mu)\sqrt{\frac{1-\mu-2\mu^2}{2(1-\mu^2)(1+\mu)^2}},$$

$$E_{dyn} = v_L^2\,\rho\,\frac{1-\mu-2\mu^2}{1-\mu},$$

where : v_R — velocity of the Rayleigh-wave, v_L — velocity of the longitudinal wave, μ — Poisson's ratio, E_{dyn} — dynamic modulus, ρ — density of the plaster mixture.

Figure 4 shows the increasing of dynamic modulus for various plaster qualities.

Reiceved, November 29, 1971

Institute for Arhitecture and Building, Weimar, German Democratic Republic

REFERENCES

1. Gensel J., *Möglichkeiten der Anwendung des Ultraschall - Laufzeitmessverfahrens und der Röntgenfeinstrukturanalyse bei hydratisierenden Bindemitteln, dargestellt am Beispiel des Systems $CaSO_4 - H_2O$.* Diss., Hochschule für Architektur und Bauwesen, Weimar, 1968.
2. Ridge M. J., *Hydration of Calcium Sulphate Hemihydrate. 1. Kinetics of the Reaction.* J. appl. Chem., **12**, 246 — 252 (1962).
3. Сегалова Е., Исмаилова В. Н., Колл. Ж., **20**, *5*, 601 — 610 (1958).
4. Fischer H. C., *The Setting of Gypsum Plaster.* ASTM Bull., Philadelphia, **192**, 43 — 47 (1953).
5. Wandser B., *Das Nachlassen der Festigkeit frisch abgebundenen Stuckgipses.* Zement - Kalk - Gips, Wiesbaden, **15**, *10*, 437 — 438 (1962).

MĂSURĂRI ULTRASONICE ÎN TIMPUL PRIZEI MORTARULUI DE IPSOS

(Rezumat)

Pe bază de experimentări se stabilește posibilitatea de investigare a procesului de hidratare a ipsosului folosind metoda ultrasunetelor (s-a lucrat în special cu ipsos albastru).

Se diferențiază trei etape în procesul de hidratare a ipsosului, determinate după valorile vitezelor ultrasunetelor; se stabilește influența pe care adaosul de $KHSO_4$, în concentrații reduse, o are în accelerarea procesului de hidratare (fig. 1) și influența conținutului în apă a mortarului asupra timpului de hidratare (fig. 2).

Variațiile vitezei de propagare a ultrasunetelor, constatate în mortarul de ipsos (fig. 3), sînt explicate ca urmare a unor transformări suferite de scheletul cristalin de $CaSO_4 \cdot {}^1/_2H_2O$ în prezența unui exces de apă și cu urmări asupra rezistențelor mecanice.

Determinîndu-se vitezele undelor ultrasonice longitudinale (v_L) și transversale (v_R) pe mai multe categorii de mortare de ipsos, s-a calculat coeficientul lui Poisson dinamic (μ_d) și apoi modulul de elasticitate dinamic (E_d) (fig. 4).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secţia V
CONSTRUCŢII. ARHITECTURĂ

C. Z. 691.5

STUDIU COMPARATIV ÎNTRE COMPOZIŢIA CHIMICO-MINERALOGICĂ MODULARĂ ŞI CARACTERISTICILE FIZICO-MECANICE ŞI CHIMICE ALE UNOR CIMENTURI DE FABRICAŢIE ROMÂNEASCĂ*)

DE

AURORA BORDEA, ALINA VASILIU, ANA TARHON, ELENA ŞTEFANCU şi ELISABETA PĂUNEL

1. Introducere

În prezenta lucrare s-a urmărit studierea comparativă a şase tipuri de ciment de fabricaţie românească folosind formulele de calcul care permit stabilirea corelaţiei între compoziţia chimico-mineralogică modulară şi caracteristicile tehnice şi chimice ale cimenturilor respective.

După ce tipurile de ciment studiate au fost supuse analizelor chimice (tabelul 1) şi încercărilor fizico-mecanice de laborator (tabelele 4...8), rezultatele obţinute au fost comparate cu cele care s-au dedus pe baza cunoaşterii componenţilor mineralogici stabiliţi prin relaţiile propuse de B o g u e, cu ajutorul valorilor calculate ale diferiţilor moduli (tabelul 3) şi prin aplicarea relaţiilor indicate de P. G o u r d i n [4] pentru calcularea contracţiei şi a rezistenţelor mecanice, cunoscînd compoziţia mineralogică.

Cu toate că prin folosirea formulelor de calcul se verifică numai cu oarecare aproximaţie rezultatele obţinute pe cale experimentală, totuşi, avînd o bază ştiinţifică, cu ajutorul lor se pot face aprecieri deosebit de interesante şi utile asupra proprietăţilor tehnice, mai cu seamă dacă se foloseşte exprimarea modulară şi înscrierile în diagramele şi graficele de care se dispune în prezent [17].

Stabilirea „compoziţiei potenţiale"[1]), adică prin calcul, mai prezintă avantajul că se efectuează rapid; se ştie că pentru a se determina compoziţia reală, fie prin analize chimice clasice, fie prin oricare procedeu modern, este necesar un volum mare de lucru în laborator.

2. Consideraţii generale

Este cunoscut faptul că cimenturile prezintă proprietăţi diferite în funcţie de compoziţia chimico-mineralogică.

Astăzi se stăpîneşte într-o astfel de măsură procesul de fabricaţie a cimentului, încît, variind materiile prime şi adaosurile, dozajul lor şi unele etape din tehnologia de

---

*) Prezentată la sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic din Iaşi, 2—4 iulie 1970.

[1]) Denumire dată de B o g u e (1955) spre a se deosebi de compoziţia reală, stabilită prin metode de laborator.

fabricație, se poate obține o gamă foarte variată de sortimente de ciment cu componenții mineralogici în proporțiile necesare pentru imprimarea proprietăților tehnice dorite.

Ca urmare a complexității și a importanței pe care o prezintă componenții mineralogici ai cimenturilor, ei au format în timp obiectul de studiu a numeroși cercetători de renume mondial (Törnebohn — 1897, R. A. Bogue — 1926, 1938, 1955, Dorsch — 1932, H. Kühl — 1955, F. M. Lea și C. H. Desch — 1956).

Cei patru componenți mineralogici de bază (alitul, belitul, celitul I și celitul II), abia în zilele noastre au putut să fie amplu studiați datorită mijloacelor moderne de cercetare (röntgenografie, microscopie electronică, ATO etc.) și să li se stabilească exact compoziția și structura lor complexă [6]. În prezent compoziția și structura fiecărui component mineralogic pot fi variate în funcție de condițiile din procesul de ardere și de răcire a clincherului.

P. Gourdin, în 1967 [4], cercetează corelația dintre compoziția reală și cea potențială (calculată) a clincherului de ciment, precum și formulele de calcul propuse de Bogue [1], Lea [10] și Parker [14] pentru cei patru componenți mineralogici. Se ajunge la concluzia că aceste formule de calcul sînt numai într-o anumită măsură verificate de practică, deoarece calculele nu pot ține seama de toate condițiile particulare ale fiecărei materii prime, a cuptorului folosit și a condițiilor industriale de răcire a clincherului. El propune o serie de relații [4] utile pentru aprecierea proprietăților tehnice.

La baza calculului componenților mineralogici din cimenturile studiate în această lucrare au stat ecuațiile lui Bogue. Aceste ecuații[2]) permit calculul distinct al celor patru constituienți principali (C_3S, C_2S, C_4AF, C_3A) pe baza rezultatelor analitice corespunzătoare celor patru oxizi de bază (CaO, SiO_2, Al_2O_3, Fe_2O_3) fără a ține seama de SO_3, P_2O_5, TiO_2, MgO, K_2O, Na_2O.

În formularea ecuațiilor propuse, Bogue a trebuit să facă și anumite ipoteze, care nu corespund întrutotul realității. În consecință cantitățile de componenți mineralogici stabilite prin calcul sînt numai aproximative[3]).

3. Compoziția chimico-mineralogică și valoarea modulilor la cimenturile studiate

a) Pentru studiu s-au ales șase tipuri de ciment de fabricație românească, din care cinci sînt silicatice, dintre cele mai reprezentative și cu frecvență mai mare pe șantiere și anume: *P* 500, *RIM* 200, *BSS*, *Pz* 400[4]) și *M* 400; al șaselea este cimentul aluminos românesc *A* 400 din tranșa anului 1967 [17], [15], [19], [5], [16].

b) Cu rezultatele analitice obținute în laborator s-a întocmit tabelul 1, în care este prezentată, comparativ, compoziția chimică oxidică a celor șapte cimenturi și limite prevăzute de normative în funcție de tipul de ciment.

De asemenea, la fiecare ciment s-a determinat și valoarea pH-ului, care la cimenturile silicatice s-a găsit cuprinsă între 11,5...12,3 și numai la cimentul *A* 400 pH = 10,5...10,7.

Se constată că, în genere, cimenturile analizate corespund, din punct de vedere chimic, condițiilor prevăzute prin normative, cu unele excepții (de exemplu la *P* 500, conținutul în Al_2O_3 este de numai 1,51%, pe cînd limitele prevăzute sînt 5...10 %).

---

[2]) $C_3S = 4{,}07\ CaO\% - 7{,}60\ SiO_2\% - 6{,}72\ Al_2O_3\% - 1{,}43\ Fe_2O_3\% - 2{,}85\ SO_3\%$ (se referă la SO_3 existent în clincher; nu se include cel din ghipsul adăugat la măcinare);

$C_2S = 2{,}87\ SiO_2\% - 0{,}75\ C_3S$;

$C_3A = 2{,}65\ Al_2O_3\% - 1{,}69\ Fe_2O_3\%$;

$C_4AF = 3{,}04\ Fe_2O_3\%$.

[3]) Bogue presupune că întreaga masă a fost transformată prin calcinare iar cristalizarea, completă, împreună cu toate procesele de reacție, decurg în condiții de echilibru. Aceste condiții nu pot fi satisfăcute în mod ideal, deoarece atît materiile prime cît și clincherul nu prezintă omogenitate din punct de vedere al compoziției chimice iar vitrifierea nu este uniformă în toată masa.

[4]) Din două tranșe, notate *Pz* 400 I și *Pz* 400 II, spre a se verifica dacă există diferențe sensibile între ele.

Tabelul 1

Componenții chimici ai cimenturilor analizate și limitele STAS

Nr. crt.	Componenții chimici %	Date analitice			Limite STAS pentru ciment Portland*) %	Date analitice		Limite STAS pentru ciment Portland cu adaos de zgură	Date analitice *M*400	Limite STAS pentru ciment metalurgic	Date analitice *A* 400	Limite normate pentru ciment aluminos
		P 500	*RIM* 200	*BSS*		*Pz* 400 I	*Pz* 400 II					
1	Umiditate	1,04	0,06	1,075	—	0,42	0,06	—	0,21	—	0,28	—
2	P. C.	3,22	1,99	2,49	3...5	2,50	1,26	5	1,18	max. 5	1,42	—
3	SiO_2 + ins.	21,93	20,30	20,85	17...26	20,23	24,41	—	26,09	—	18,66	4...15
4	Insolubile	1,23	1,22	1,19	1...5	1,19	1,04	—	1,14	—	11,36	—
5	SiO_2 liber	20,70	19,08	19,65	—	19,04	23,37	—	24,86	—	7,30	—
6	Suma oxizilor	5,22	6,95	9,35	—	9,15	7,28	—	9,54	—	49,44	—
7	Fe_2O_3	3,05	2,27	3,35	2...6	3,42	2,53	—	2,63	—	11,42	5...15
8	Al_2O_3	1,51	3,40	5,05	5...10	5,52	3,01	—	3,52	—	40,06	30...50
9	MnO	0,05	0,87	0,75	—	0,20	1,27	—	2,86	2	—	—
10	TiO_2	0,60	0,40	1,10	—	—	0,46	—	0,53	—	—	1,5...2,5
11	CaO legat	61,91	58,50	57,92	58...68	64,23	61,34	—	58,12	—	29,99	35...45
12	CaO liber	1,52	1,21	2,53	—	1,05	0,99	—	1,12	—	1,48	—
13	CaO legat de SO_3	1,15	2,63	1,56	—	2,45	1,63	—	1,34	—	—	—
14	MgO	4,16	7,08	4,31	0...5	3,30	4,00	5	6,00	5,5	4,82	0,1...1,5
15	Na_2O	1,67	1,59	1,76	—	0,66	1,57	—	1,06	—	0,05	0...0,6
16	K_2O	0,57	0,66	0,87	—	0,60	0,66	—	0,57	—	0,37	0...0,4
17	SO_3	1,65	3,77	2,24	0...3	3,50	2,33	3	1,92	3	0,20	0...1,2
18	pH	11,5... ...12	12,3	12,2	—	12,1	12,2	—	12,2	—	10,7... ...10,5	—

*) STAS 388-68 pentru ciment Portland.

Tabelul 2

Componenţii mineralogici la cimenturile româneşti analizate şi limitele calculate după B o g u e

Nr. crt.	Componentul mineralogic	După B o g u e									
		calculat %			Limită %	calculat %		Limită %	*M* 400	*A* 400	
		P 500	*RIM* 200	*BSS*		*Pz* 400 I	*Pz* 400 II		calculat %	calculat %	limită %
1	C_3S	57,53	56,31	41,32	30...60	55,72	41,56	—	14,75	—	—
2	C_2S	16,26	12,53	25,40	15...37	16,27	35,89	—	60,28	13,57	29
3	C_4AF	10,64	6,9	10,18	8...10	10,39	7,69	—	7,99	34,71	7...15
4	C_3A	5,90	5,18	7,72	7...15	8,85	3,70	max. 8	4,88	—	—
5	CA	—	—	—	—	—	—	—	—	29,58	55...70
6	$CaSO_4$	2,80	6,4	3,80	—	5,95	3,96	—	3,26	—	—
7	CaO liber	1,52	1,21	2,53	—	—	0,99	—	1,12	1,48	—
8	MgO	4,16	7,08	4,31	—	3,30	4,00	—	6	4,82	—

Tabelul 3

Modulii calculați la cimenturile românești analizate și limitele indicate pentru moduli

Nr. det.	Modulul	Calculat			Valori limită	Calculat				Valori limită
		P 500	*RIM* 200	*BSS*		*Pz* 400 I	*Pz* 400 II	*M* 400	*A* 400	
1	Modulul de bazicitate	2,23	2,30	2,09	1,7...2,4	2,15	2,09	1,86	—	—
2	S_K (K ü h l)	96,30	97,19	93,61	85...100	96,51	86,08	76,87	67,26	100...115
3	S_K (K i n d)	93,75	94,86	89,76	—	94,52	83,84	73,55	—	—
4	M.S. $= \frac{\%\ SiO_2}{\%\ Al_2O_3 + \%\ Fe_2O_3}$	2,86	3,36	2,32	1...4	2,26	4,21	4,04	—	—
5	M. F. $= \frac{\%\ Al_2O_3}{\%\ Fe_2O_3}$ pentru ciment aluminos	—	—	—	—	—	—	—	3,50	9...11
6	M.A. $= \frac{\%\ Al_2O_3}{\%\ Fe_2O_3}$	1,36	1,49	1,50	0,2...3,5	1,61	1,19	1,33	—	—
7	M.A. $= \frac{\%\ Al_2O_3}{\%\ SiO_2}$ pentru ciment aluminos	0,20	0,17	0,27	—	0,27	0,13	0,14	3,50	20...30
8	Al_2O_3/CaO	0,06	0,05	0,086	—	0,087	0,050	0,06	—	—
9	Indicele L a f u m a $\frac{CaO\%}{SiO_2\% + Al_2O_3\%}$	2,15	2,20	1,98	—	2,00	2,06	1,81	—	—
10	Indicele V i c a t (B u r g h) $\frac{SiO_2\% + Al_2O_3\%}{CaO\ \%}$	0,39	0,37	0,42	0,4...0,9	0,40	0,43	0,49	—	—
11	Indicele G r ü n**) $\frac{Fe_2O_3\% + SiO_2\%}{CaO\% + MgO\% + Al_2O_3}$	0,33	0,31	0,33	0,25...0,40	0,33	0,38	0,42	—	—
12	$C_3S\%/CS\%$	3,53	4,49	1,62	—	3,42	1,15	0,20	—	—
13	$\frac{C_3S + C_2S}{C_4AF + C_3A}$	4,49	5,68	3,74	—	3,78	6,80	5,90	—	—
14	M cal. $= \frac{\%\ C_3S + \%\ C_3A}{\%C_2S + \%C_4AF}$	2,34	3,15	1,3	—	2,4	1,1	0,28	—	—

$$S_K = \frac{\%\ CaO}{2{,}8\%\ SiO_2 + 1{,}1\%\ Al_2O_3 + 0{,}7\%\ Fe_2O_3} \cdot 100$$

$$S'_K = \frac{\%\ CaO\ (1{,}65\%\ Al_2O_3 + 0{,}35\%\ Fe_2O_3)}{2{,}8\%\ SiO_2} \cdot 100$$

*) și **) indicele de agresivitate.

Diferenţa de compoziţie chimică este sesizabilă de la un tip la altul de ciment ; diferenţe, chiar accentuate, se constată şi la cimentul de acelaşi tip, dar din tranşe diferite (*PZ* 400 I şi *PZ* 400 II).

Diferenţe de compoziţie chimică există între cimenturile româneşti şi cele străine (din Anglia, Franţa, R. F. a Germaniei, Ungaria), chiar dacă sînt de acelaşi tip [2, p. 19].

c) Cu rezultatele analitice din tabelul 1 s-au calculat componenţii mineralogici ai celor şase tipuri de ciment românesc, aplicînd ecuaţiile lui B o g u e. Rezultatele şi limitele impuse de normative sînt prezentate, comparativ, în tabelul 2.

În cazul primelor trei cimenturi analizate, numai *BSS* are componenţii mineralogici cuprinşi în limitele cerute şi se încadrează exact în categoria cimenturilor Portland normale [17, p. 489]. Cimentul *P* 500 are conţinutul în C_3A sub limită iar *RIM* 200 are conţinutul în C_4AF şi C_3A sub limită.

Dintre cimenturile cu zgură analizate, *Pz* 400 I are cei patru componenţi mineralogici principali în limitele cerute pentru cimentul Portland normal [17, p. 489].

Cimentul aluminos *A* 400, de parageneză II [17], [15], este foarte sărac în CA, componentul principal şi chiar conţinutul în C_2S este mult sub limită; apare în proporţie mare doar C_4AF.

d) Luînd ca bază compoziţia chimică a celor şase tipuri de cimenturi româneşti, prezentată în tabelul 1, s-a stabilit şi valoarea modulilor (tabelul 3) necesari pentru a se aprecia şi a se stabili cu ajutorul diagramelor o serie de proprietăţi importante pentru tehnică : temperatura de clincherizare [17, fig. 398], timpul de priză şi întărire, căldura de hidratare [17, fig. 400], contracţia, sensibilitatea la întărire în exces de apă [17, fig. 402], rezistenţele mecanice [17, fig. 399], rezistenţa la acţiunea sulfatică [17, fig. 401].

Sistemul modular şi transpunerea proprietăţilor în diagrame modulare simple M_S/M_A ori mai complexe [17] constituie o bază obiectivă, spre deosebire de calculul componenţilor mineralogici prin metoda B o g u e, în care caz erorile pot fi mult mai mari.

4. Proprietăţile tehnice ale cimenturilor studiate, pe baza compoziţiei mineralogice, a valorii modulilor şi a rezultatelor încercărilor fizico-mecanice

a) *Priza şi întărirea*

Se ştie că regimul de priză şi de întărire este determinat de compoziţia mineralogică a cimentului respectiv, de proporţia de ghips adăugat la măcinare. Priza este cu atît mai rapidă cu cît C_3A şi C_3S sînt în proporţii mai mari, iar viteza de întărire se poate aprecia după valoarea modulului de intensitate de întărire, $C_3S\%/C_2S\%$.

Din datele cuprinse în tabelul 4 rezultă că în ceea ce priveşte timpul de priză (începutul şi sfîrşitul prizei), cimenturile silicatice analizate corespund condiţiilor prevăzute în standarde.

Tabelul 4

Apa de amestecare pentru pasta de consistenţă normală şi timpul de priză la cimenturile studiate

Caracteristici fizice		Cimenturile studiate						
		P 500	*RIM* 200	*BSS*	*Pz* 400 I	*Pz* 400 II	*M* 400	*A* 400
Apa de amestecare pentru pasta de consistenţă normală, [%]		27,5	25,0	25,5	26,4	26,6	25,9	26,6
Priza	începutul prizei, [ore]	1,45	2,15	1,50	2,15	2,40	2,40	2,30
	sfîrşitul prizei, [ore]	3,45	3,45	3,00	4,00	4,20	4,55	5,20
	durata prizei, [ore]	2,00	1,30	1,50	1,45	1,40	2,15	2,50

Rezultă clar influenţa compoziţiei mineralogice şi a proporţiei de ghips prezent la fiecare tip de ciment (v. tabelele 1, 2 şi 4).

b) *Căldura de hidratare*

Se ştie că un ciment dezvoltă cu atît mai puţină căldură în timpul hidratării cu cît modulii S_K şi M_A au valori mai mici iar modulul M_s este mai ridicat.

Calculînd căldura de hidratare la cele şase cimenturi silicatice, după M i r o n o v [11], folosind coeficienţii din tabelul 5, s-au găsit rezultatele cuprinse în tabelul 6.

Tabelul 5

Coeficienţii pentru calculul căldurii de hidratare a unui ciment
(după S. A. M i r o n o v)

Nr. crt.	Termen zile	CaO	SiO_2	Fe_2O_3	Al_2O_3
1	3	+3,40	−5,79	−3,20	−1,10
2	28	+3,30	−5,00	−3,10	−0,10

Tabelul 6

Căldura de hidratare la cimenturile studiate
(calculate după S. A. M i r o n o v, în cal/g de ciment)

Nr. crt.	Căldura de hidratare (cal/g)	*P* 500	*RIM* 200	*BSS*	*Pz* 400 I	*Pz* 400 II	*M* 400
1	la 3 zile	78,12	86,12	72,35	88,28	61,55	41,39
2	la 28 zile	89,80	88,22	82,03	105,60	78,53	58,59
3	limite	60...130					

Apare evidentă influenţa pe care o exercită asupra căldurii de hidratare atît compoziţia mineralogică şi valoarea modulilor cimentului respectiv (v. tabelele 2, 3), cît şi adausul de zgură (cimentul *M* 400 cu $S_K = 76{,}87$, are cea mai mică căldură de hidratare dintre toate cimenturile analizate) şi viteza de hidratare (cimentul *RIM* 200, cu $S_K = 97{,}19$, dezvoltă o cantitate mare de căldură pînă la 3 zile pentru ca la 28 zile creşterea cantităţii de căldură să fie foarte redusă în comparaţie cu cea a cimenturilor *P* 500 şi *BSS*).

c) *Contracţia în timpul întăririi*

Se ştie că reducerea contracţiei la un ciment se bazează pe reducerea în primul rînd a conţinutului în C_3A şi chiar în C_3S ; valoarea modulului M_A trebuie să fie cît mai redusă.

Dintre cimenturile româneşti analizate, sorturile *P* 500, *RIM* 200, *BSS* şi *PZ* 400 au un conţinut mare de C_3S, dar foarte redus de C_3A (tabelul 2) iar modulii de alumină (M_A) au valori medii (tabelul 3).

În tabelul 7 sînt prezentate rezultatele, obținute prin calcul, aplicînd formulele propuse de P. Gourdin[5]) [4] privind contracția la cele șase cimenturi silicatice. În paralel sînt redate rezultatele experimentale pentru constanta de volum.

Cimentul *A* 400, avînd un conținut redus de C_3A și crescut de C_4AF, rezultă că va avea o contracție mică.

Tabelul 7

Contracția în timpul întăririi, calculată și determinată experimental, la cimenturile silicatice analizate

Nr. crt.	Cimenturile studiate	Contracția calculată		Constanța de volum	
		μ/m	mm/m	pe turte	cu acele Le Chatelier
1	*P* 500	410,33	0,410	bună	3,00
2	*RIM* 200	699,3	0,699	bună	4,00
3	*BSS*	875,0	0,875	bună	3,00
4	*Pz* 400 I	770,4	0,770	bună	2,00
5	*Pz* 400 II	820,6	0,820	bună	2,00
6	*M* 400	535,6	0,535	bună	2,00

d) *Rezistențele la compresiune și la întindere*

Cimenturile silicatice analizate au valorile modulilor S_K și M_S ridicate, fapt care avantajează rezistențele mecanice; modulul M_A apare însă cu valori medii destul de mari pentru a influența negativ asupra rezistențelor mecanice.

Aceste constatări, pe baza modulilor (tabelul 2), s-au verificat și experimental (tabelul 8) căci nu s-au atins mărcile decît la cimenturile *Pz* și *RIM*.

Tabelul 8

Valorile rezistențelor mecanice la 28 zile, la cimenturile silicatice studiate, calculate și determinate experimental

Nr. crt.	Cimenturile studiate	Rezultatele calculate		Rezultatele experimentale		
		σ_c		σ_c		σ_t
		kgf/cm²	daN/cm²	kgf/cm²	daN/cm²	kgf/cm²
1	*P* 500	504,93	504,93	465	465	36,0
2	*RIM* 200	509,75	509,75	415	415	28,5
3	*BSS*	430,6	430,6	380	380	29,2
4	*Pz* 400 I	498,2	498,2	452	452	32,0
5	*Pz* 400 II	446,78	446,78	400	400	31,6
6	*M* 400	187,87	187,87	269	269	31,9

[5]) Contracția = $204\,C_3S + 1\,382\,C_4AF + 2\,432\,C_3A + 1\,100$ restul, [μ/m],
restul = $1 - (C_3S + C_3A + C_4AF)$.

În tabelul 8 se prezintă comparativ valorile rezistențelor la compresiune rezultate prin calcul, aplicînd relațiile propuse de P. G o u r d i n[6]) [4].

La cimenturile aluminoase se știe că cu cît modulii M_A și și M_F au valori mai mici, cu atît aceste cimenturi au rezistențe mecanice mai scăzute.

Cimentul *A* 400, cu modulii $M_A = 3{,}50$ și $M_F = 3{,}50$, deci cu valori foarte reduse față de limitele cerute, ar trebui să aibă rezistențe mecanice reduse [19], [16], [5].

e) *Rezistența la sulfați*

Se știe că C_3A constituie componentul care participă la formarea „bacilului cimentului silicios". Dacă $M_A = 0{,}64$ întreaga cantitate de Al_2O_3 este legată sub formă de C_4AF și cimentul este rezistent la sulfați. Atunci cînd $M_A > 0{,}7$, cimentul respectiv se poate considera „foarte stabil" la sulfați [17] și „stabil" cînd $0{,}7 < M_A < 1$ [17].

Folosind acest criteriu de clasificare a rezistenței cimenturilor la sulfați, pe baza valorii pe care o are modulul M_A [17], în tabelul 9 s-au prezentat rezultatele obținute. Cimenturile studiate neavînd o destinație pentru medii agresive, rezultatele nu puteau să fie altele decît cele redate în tabelul respectiv.

Tabelul 9

Rezistența la sulfați, în funcție de valorile modulului M_A, la cimenturile studiate

Nr. crt.	Cimenturi studiate	Limitele admisibile ale modulilor			Stabilitatea la sulfați [17]	
		$85 < S_K < 100$	$1{,}8 < M_S < 3$	$0{,}0 < M_A < 3{,}5$	Accesib. $1 < M_A < 1{,}4$	Nestab. $M_A > 1{,}4$
1	*P* 500	96,30	2,86	1,36	da	—
2	*RIM* 200	97,19	4,11	1,49	—	da
3	*BSS*	93,61	2,32	1,50	—	da
4	*Pz* 400 I	96,51	2,26	1,61	—	da
5	*Pz* 400 II*)	86,08	4,21	1,19	da	—
6	*M* 400	76,87	4,04	1,35	da	—
7	*A* 400	67,26	—	3,5	—	—

*) Nepotrivirile între *Pz* 400 I și *Pz* 400 II, constatate și la alte proprietăți precum și la compoziție, dovedesc neomogenitatea și diferența de compoziție de la o tranșă la alta a cimenturilor cu adaos de zgură.

Se știe că cimentul aluminos trebuie să reziste bine la acțiunea sulfatică. Cimentul *A* 400 avînd un conținut redus în CA, conduce la un modul M_A foarte redus (v. tabelele 2, 3) ; pe baza acestor valori s-ar putea afirma că cimentul aluminos *A* 400 nu poate să reziste la sulfați. Probele supuse timp de 4 ani într-un sol sulfatic din zona orașului Iași urmează să fie examinate și supuse încercărilor, după care se vor putea trage concluziile definitive.

---

[6]) Rezistența la compresiune $= 726\,C_3S - 52\,C_3A + 276\,C_4AF + 256$ restul, [kgf/cm²], restul $= 1 - (C_3S + C_3A + C_4AF)$.

5. Concluzii

La cimenturile de fabricație românească, *P* 500, *RIM* 200, *BSS*, *Pz* 400, *M* 400, *A* 400, determinînd în laborator compoziția chimică și anumite proprietăți fizico-mecanice iar prin calcul stabilind compoziția mineralogică (după B o g u e), modulii necesari interpretărilor, rezistența la compresiune și contracția (după G o u r d i n) precum și căldura de hidratare (după M i r o n o v), rezultatele obținute pe aceaste căi au condus la o serie de concluzii utile pentru studii următoare și pentru producție.

1. Deși „compoziția potențială", stabilită după formulele lui B o g u e, prezintă unele erori și în consecință este numai aproximativă, totuși permite obținerea unor indicații prețioase referitoare la cele mai principale proprietăți tehnice ale cimentului, prezentînd și avantajul de a se stabili rapid. Prin urmare, în laboratoarele de specialitate formulele lui B o g u e ar trebui să se folosească pe scară mai largă. De asemenea, în buletinele de analize ale fabricilor producătoare de ciment și în standarde ar trebui să fie dată compoziția mineralogică la fiecare ciment sau cel puțin compoziția oxidică astfel încît să se poată calcula componenții mineralogici.

2. Constituția modulară și diagramele modulare permit într-o măsură mai largă și mai fidel decît „compoziția potențială", deducerea anumitor proprietăți ale cimentului.

3. Cu formulele propuse de P G o u r d i n pentru calculul rezistenței la compresiune pe baza „compoziției potențiale", s-au obținut rezultate informative, la unele cimenturi chiar apropiate de cele stabilite pe probe în laborator. O prelucrare a formulelor lui P. G o u r d i n în sensul adaptării lor la condițiile tehnologiei de fabricație a cimenturilor românești și de stabilire a rezistenței în laborator, vor face posibilă apropierea în măsură mai mare a rezultatelor obținute pe cele două căi ; în acest caz, după o perioadă de examinare în paralel, ar putea deveni obligator numai procedeul de calcul al rezistenței.

4. Contracția și căldura de hidratare, calculate cu ajutorul formulelor lui G o u r p i n (contracția) și M i r o n o v (căldura de hidratare), se pot determina rapid ; rezultatele însă nu s-au putut confrunta, decît parțial, cu cele obținute în laborator.

Datorită avantajelor folosirii formulelor de calcul pentru aprecierea acestor proprietăți, cel puțin cu titlu informativ, apare necesară extinderea studiilor în paralel (prin calcul și prin probe) pentru verificările și retușările necesare.

5. În cazul celor șapte cimenturi românești studiate (șase tipuri) dintre cele trei pentru care standardele prevăd limitele componenților mineralogici (*P* 500, *RIM* 200, *BSS*), numai cimentul *BSS* se încadrează din acest punct de vedere în limitele prevăzute de standarde (tabelul 2).

Cimentul *A* 400 (tranșa 1967), de parageneză II, este foarte sărac în CA și chiar în C_2S, în comparație cu limitele prevăzute de normele interne ale fabricii din Comarnic. Cu o tehnologie bine studiată pentru obținerea mortarelor și a betoanelor cu acest ciment, s-au obținut rezultate satisfăcătoare [5], [16], [19].

6. Calculînd modulii (tabelul 3) s-a constatat, pentru cei prevăzuți în standarde, că valorile lor se încadrează în limitele impuse.

7. Timpul de priză, determinat în laborator, corespunde, la toate cimenturile, condițiilor standard. Din variațiile constatate de la un ciment la altul, a începutului și a sfîrșitului prizei, apare evidentă influența compoziției mineralogice și a proporției de ghips adăugat (v. tabelele 1, 2, 4).

8. Cantitatea de căldură de hidratare (calculată după M i r o n o v), prezintă diferențe de la un ciment la altul. Apare evidentă influența compoziției mineralogice, a modulilor, a proporției de zgură adăugată și a vitezei de hidratare.

Cimentul *M* 400, cu modulul $S_K \approx 77$, are cea mai redusă cantitate de căldură de hidratare.

Cimentul *RIM* 200, cu modulul $S_K \approx 97$, dezvoltă la 3 zile cea mai mare cantitate de căldură dintre toate cimenturile silicatice analizate ; la 28 zile căldura de hidratare este aproximativ egală cu cea a cimentului *P* 500, deci creșterea este foarte redusă.

9. Contracția calculată cu formulele lui P. G o u r d i n diferă de la un ciment la altul ; variațiile sînt în concordanță cu compoziția mineralogică a acestor cimenturi și cu valoarea modulilor.

Constanta de volum (determinată prin metoda turtelor şi cu acele Le Chatelier) este bună la toate cimenturile analizate.

10. Influenţa valorilor modulilor s-a resimţit asupra mărcii. La toate cimenturile silicatice analizate modulii S_K şi M_S au valori mari, fapt care este în favoarea rezistenţelor mecanice; modulul M_A are valori medii şi nu reduse cum s-ar cere pentru a avantaja rezistenţele mecanice.

Ca urmare a influenţei valorilor pe care o exercită modulii, marca în laborator nu s-a obţinut decît la *RIM* 200 şi *Pz* 400.

Rezistenţa la compresiune, calculată după Gourdin, este apropiată de valoarea rezistenţei stabilită pe probe numai la cîteva cimenturi.

11. La cele şase cimenturi silicatice rezistenţa la sulfaţi s-a apreciat pe baza valorii pe care o are modulul M_A (după clasificarea dată de prof. Ş. Solacolu [17]). Fiind cimenturi obişnuite ele nu sînt rezistente la sulfaţi; toate au modulul M_A cu valori destul de mari, încît intră în categoria cimenturilor instabile, cel mult acceptabile ($1 < M_S \ll 1{,}4$).

Pe baza acestor constatări s-au putut stabili următoarele concluzii generale:

a) Dacă se dispune de compoziţia chimico-mineralogică şi de valoarea modulilor la un ciment, se pot face aprecieri utile pentru producţie asupra proprietăţilor tehnice, deci şi asupra sectoarelor de utilizare.

b) Diferenţele de compoziţie de la un tip la altul de ciment românesc se repercutează asupra proprietăţilor lor tehnice.

c) Ar trebui extinse mai mult aprecierile pe baza compoziţiei şi a modulilor iar proprietăţile tehnice să se stabilească în paralel pe probe şi prin calcul pînă se va dispune de formulele cele mai corecte.

c) La acelaşi tip de ciment cu adaus de zgură, dar din tranşe diferite, pot să existe mari diferenţe de compoziţie care se reflectă în proprietăţile lor tehnice, ca urmare a gradului diferit de omogenitate de la o tranşă la alta. Trebuie de urmărit dacă această constatare nu este valabilă şi în cazul altor tipuri de cimenturi şi a altor adausuri.

Primită la 21 martie 1972

Institutul politehnic, Iaşi,
Catedra de fundaţii şi materiale de construcţii,
Laboratorul de chimie şi materiale de construcţii

BIBLIOGRAFIE

1. Bogue R. H., *The Chemistry of Portland Cement.* New—York, 1947, cap. 10, 186—187.
2. Biczöck K. I., *Coroziunea şi protecţia betonului,* (trad. din l. engleză). Ed. Tehn., Buc., 1965, 1—80.
3. Duriez M., Arrambide J., *Nouveau Traité de Matériaux de Construction.* T. I, *Granulates, Ciments, Betons.* Dunod, Paris, 1961.
4. Gourdin P., *Composition minéralogique et propriétés des clinkers Portland — 1967.* Rev. des Mat. de Constr. *650—651,* 216 (1969).
5. Grigorescu R., Păunel E., Caraman C., Sofronie E., *Cercetări asupra factorilor care influenţează calitatea mortarurilor cu ciment aluminos românesc.* Bul. Inst. polit. Iaşi, s. V, XVII (XXI), *3—4,* 87—97 (1971).
6. Guinier A., Regourd M., *Structure des minéraux du ciment Portland.* Rev. des Mat. de Constr., *643—646,* 129—220 (1969).
7. Кинд В. В., *О методах экспериментальной оценки коррозионой стойкость цементных растворов.* Цемент, *4* (1954).
8. Kühl H., *Zement — Chemie.* Verlag Technik, Berlin, 1958.
9. Lafuma H., *Liants hydrauliques.* Dunod, Paris, 1964.
10. Lee F. M., *The Chemistry of Concrete and Cement.* London, 1956, 141.

11. Mironov S. A., *Teoria și metodele betonării pe timp friguros*, (trad. din l. rusă). Ed. Tehn., Buc., 1952.
12. Miller D. G., Manson P. W., Chan R. T. H., *Bibliography on Sulphate Resistance of Portland Cement, Concretes and Mortars*. Univ. of Minnesota, 1952.
13. Nicolau V., *Introducere în teoria betonului*. Ed. Tehn., Buc., 1954.
14. Parker T. W., *The Constitution of Aluminous Cements*. Fourth Congress, Cambridge, London, 1952.
15. Păunel E., Bordea A., Iorga N., Alexandrescu M., Vasiliu A., *Contribuții la studiul compoziției și a structurii cimentului aluminos românesc*. Bul. Inst. polit. Iași, s. V, XVI (XX), *3—4*, 75—81 (1970).
16. Păunel E., Grigorescu R., Dascălu V., *Studiu în vederea stabilirii parametrilor optimi de obținere a betoanelor cu ciment aluminos românesc*. Bul. Inst. polit. Iași, XIV (XVII), *3—4*, 674—679 (1968).
17. Solacolu Ș., *Chimia fizică a silicaților tehnici*. Ed. Tehn., Buc., 1968, 441—513.
18. Steopoe A., *Îndrumător pentru utilizarea cimenturilor în construcții*, Ed. Tehn. Buc., 1967.
19. Vasilescu F., Păunel E., Sofronie E., Grigorescu R., Caraman C., *Cercetări asupra proprietăților fizico-mecanice ale cimentului aluminos românesc*. Bul. Inst. polit. Iași, s. V, XVII (XXI), *1—2*, 73—81 (1971).
20. Voina N. I., Mugioiu D., *Chimie și materiale de construcție*. EDP, Buc., 1969

ÉTUDE COMPARATIVE DE LA COMPOSITION CHIMICO-MINÉRALOGIQUE MODULAIRE ET LES CARACTÉRISTIQUES PHYSICO - MÉCANIQUES ET CHIMIQUES DE CERTAINS CIMENTS DE FABRICATION ROUMAINE

(Résumé)

Pour les ciments de fabrication roumaine : *P* 500, *RIM* 200, *BSS*, *Pz* 400, *M* 400 et *A* 400, on a déterminé par voie analytique la composition chimique oxydique et on a établi, en laboratoire, quelques propriétés physico-mécaniques, à savoir : le temps de prise, la constante de volume, la résistance à la compression et à la traction.

À partir des résultats de l'analyse chimique on a calculé les composants minéralogiques, en appliquant les formules de calcul de Bogue [1]. On a calculé aussi une série de modules nécessaires à définir certaines propriétés.

La composition chimico-minéralogique et les valeurs des modules ont permis de déduire, par calcul, les résistances à la compression et la contraction en appliquant les relations élaborées par P. Gourdin [4] ainsi que la chaleur d'hydratation d'après Mironov [11] ; les résultats ont été comparés à ceux obtenus par voie experiméntale.

À partir des données obtenues en laboratoire et par calcul on a déterminé la corrélation entre la composition chimico-minéralogique et les modules avec les propriétés des ciments analysés.

Il en résulte nombre d'avantages parmi lesquels la possibilité de remplacer les expériments de laboratoire par des procédés de calcul.

Les résultats intéressent la production, car ils se rapportent aussi aux ciments qui sont fabriqués en Roumanie.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC DIN IAŞI
Tomul XVIII (XXII), fasc. 3—4, 1972
Secţia V
CONSTRUCŢII. ARHITECTURĂ

D. K. 691.3

EINFLUSS DES TIEFDRUCKEINBRENNENS AUF DIE PHYSIKALISCHEN EIGENSCHAFTEN DER LEICHTBETONE

VON

KALIKST GRABIEC und ANTONI LACZKOWSKI

1. Einleitung

Mit der weiteren Entwicklung der Produktion von künstlichen Zuschalgstoffen oder auch infolge der richtigen Einschätzung ihrer Vorzüge, durch Nutzung in industriellem Maßstab der großen Vorräte einiger Länder an leichten natürlichen porösen Kalkstein-Zuschlagstoffen, wird sich eine zunehmende Bedeutung der Leichtbetone ergeben.

Der Hauptbedarf an Leichtbetonen wird aus dem Entwicklungstempo des Wohnbaus entstehen.

Die schon heute in der Ausführung vorherrschenden Baumethoden determinieren eine maximale Nutzung von Baumaschinen, eine schnelle Formrotation und erfordern notwendigerweise ein beschleunigtes Abbinden.

Was die Methoden zur Beschleunigung der Betonerhärtung anbetrifft, so gehört das Tiefdruckeinbrennen zu den zugänglichsten und somit zu den vebreitetsten Methoden.

Das Einbrennen der Stahlbetonelemente erfolgt in Brühkammern bzw. sogar unter verschiedenartigen Überdeckungen oder unter Decken, meist mit Zuhilfenahme von Zeltstoff.

Das Tiefdruckeinbrennen ist die zugänglichste Lösung im Bereich der Akzeleration der Erhärtung von Betonen, dabei charakterisiert sie sich mit niedrigen Investitionskosten, sie ist ökonomisch im Betrieb, unkompliziert bei der Bedienung.

2. Die Vorzüge des Tiefdruckeinbrennens

Das Tiefdruckeinbrennen wird sowohl in stationären Betonwerken als auch in zeitweiligen Betonwerken auf Baustellen angewandt.

Die wichtigsten Vorzüge des Tiefdruckeinbrennens kann man folgendermaßen charakterisieren :

1. Das Tiefdruckeinbrennen verkürzt praktisch die Reifezeit des Betons auf 24 Stunden vom Zeitpunkt der Einbetonierung des Elements an, unabhängig von der Jahreszeit und von der Außentemperatur. Dies ermöglicht auch eine ununterbrochene, kontinuierliche Fortsetzung der Produktion auf gleichem Niveau ohne Rücksicht auf die Jahreszeit.

2. Der gleichmäßige Verlauf der Betonbefeuchtung mit feuchtem Dampf im Anfangsstadium des Reifens begünstigt den Hydratationsprozeß von Zement. Die anhaltende Intensivität der Dampffeuchtigkeit aktivisiert ein beträchtliches Prozent der in der Anfangsphase unhydratisierten Zementteilchen, was zur Zunahme der anfänglichen Betonfestigkeit beiträgt. Das gleichmäßige Befeuchten des Betons im Anfangsstadium seines Reifens hat in hohem Grade Einfluß auf die Verminderung der inneren Schwindung und verhütet die Entstehung von Schwindrissen an der Oberfläche.

3. Wenn man das vorschriftsmäßige Regime des Tiefdruckeinbrennens in Fertigbauteilbetrieben einhält, kann man eine Produktionssteigerung erreichen, die Qualität der Erzeugnisse verbessern und somit die Rentabilität der Betriebe erhöhen.

Die investierten finaziellen Mittel zur Verbesserung der Brühanlage und eventuell auch des Reiferaumes in stationären Betonwerken werden sich binnen kurzer Zeit amortisieren. Die erreichten Resultate dagegen werden in der endgültigen finanziellen Bilanz eine sehr bedeutende Position einnehmen.

2.1. Einige Bemerkungen über die Verbesserungsmöglichkeiten des Einbrennens von Fertigteilelementen aus Leichtbetonen

Die bisherigen Erfahrungen die bei der Anwendung des Tiefdruckeinbrennens an gewöhnlichen Betonen gewonnen wurden, ermutigen zur Verbesserung der Methode des Einbrennens. Diese Verbesserungen sollten in der Richtung auf eine Kontrolle der Dampfqualität gehen, die den Brühständen zugeführt wird und zur maximalen Verkürzung der Dauer des Einbrennens streben. Die Verkürzungen der Zyklen des Einbrennens sollte man von der Mächtigkeit der Elemente bei der Wärmebehandlung, von den angewandten Zementsorten, von der Abdeckungsdichte sowie von der Richtigkeit der Angaben der Meßgeräte, welche die Feuchtigkeit und die Temperatur des Produktionsdampfes angeben, abhängig machen.

Die gezogenen Schlußfolgerungen und die bearbeiteten Hinweise sollten sich auf statistische Angaben stützen.

Die polnischen Versuche mit dem Einbrennen der Leichtbetone datieren sich seit einigen Jahren, und die bisher veröffentlichten Ergebnisse der Forschungsarbeiten, u. a. [3], [5], stellen eindeutig fest, daß die Gestaltung der Festigkeits- und Verformungsänderungen im Prinzip nicht von den Charakteristiken abgehen, die den Leichtbeton beim Einbrennen in denselben Verhältnissen kennzeichnen.

Die Differenzen bei der Gestaltung der physikalisch-chemischen Eigenschaften von eingebrannten leichten Betonen können lediglich dann auftreten, wenn der Zuschlagstoff puzzolanische Eigenschaften aufweist.

3. Umfang der durchgeführten Forschungsarbeiten

In der vorliegenden Arbeit werden Ergebnisse von Versuchen an Leichtbetonen mit geschlossener Struktur zwischen den Zuschlagstoffen besprochen. Die angefertigten Betonprobeserien wurden unter Tiefdruck eingebrannt, parallel wurden Festigkeitsexperimente an einer gleichen Menge von unbehandelten Proben durchgeführt.

Zum Vergleich der Experimentergebnisse im Bereich der Festigkeitsveränderungen wurden auch Proben mit gewöhnlichen Betonen durchgeführt.

3.1. Die angenommenen Betonarten

Von Experimenten betroffen wurden vier Betonarten, die abhängig von der Art des Zuschlagstoffes entsprechend mit den Marken *A*, *B*, *C* und *D* gekennzeichnet wurden, dabei wurden die eingebrannten Probeserien mit der Kennmarke *n* versehen, also A_n, B_n usw.: a) Serie *A* Leichtbeton — poröser Kalkstein „Karsy"; b) Serie *B* Leichtbeton — poröser Kalkstein „Pinczow"; c) Serie *C* Leichtbeton — Keramsit „Mszczonow"; d) Serie *D* gewöhnlicher Beton — mit Kieszuschlag.

Um den Einfluß der Zementart zu verhindern wurden in dieser Arbeit nur Forschungsergebnisse besprochen und diskutiert, bei denen eine Zementsorte angewandt wurde, nämlich Portlandzement Marke 350 aus dem Zementwerk „Warta".

3.2. Vorbereitung der Betongemische

a) *Charakteristik der Eigenschaften von leichten Zuschlagstoffen*

Bei der Projektierung von Leichtbetonen, insbesondere aus Zuschlagstoffen mit offenen Poren, kann man nicht unmittelbar vom Hauptkennwert *c/w* Gebrauch machen, der zur B o l o m e y-Formel gehört und bei der Projektierung von gewöhnlichen Betonen angewandt wird.

Leichte Zuschlagstoffe zeichnen sich durch ihre hohe Porösität aus (ungefähr 40%), ein beträchtlicher Teil der Poren, insbesondere in gebrochenen Zuschlagstoffen, ist offen, eben dadurch entstehen zusätzliche Schwierigkeiten bei der Bestimmung der notwendigen Anmachwassermenge zur Erreichung der geplanten Betonkonsistenz.

Man bemerkt unschwer, daß im Anfangsstadium der Leichtbetonerhärtung ähnliche Erscheinungen wie im Falle von Schwerbeton vorgehen, das bedeutet, daß die Zuschlagstoffkörner eine größere Festigkeit besitzen als der Zementleim.

Nach genügender Betonerhärtung besitzt der Zementleim eine höhere Festigkeit als die Zuschlagstoffkörner im Gegensatz zu den gewöhnlichen Betonen.

Die durchgeführten Experimente an leichten Konstruktionsbetonen zeigen, daß einer der Hauptfaktoren, die die Gestaltung der Betonfestigkeit beeinflussen, das Verhältnis der Menge der aktivierten Zements zur Porösität des Zuschlagstoffes ist.

Beim Vergleich der Forschungsergebnisse kann man bemerken, daß der Einfluß des Anmachwassers verhältnismäßig gering ist auf die Festigkeit der Leichtbetone aus Zuschlagstoffen mit offenen Poren. Auch hat das in bestimmten Abschnitten in Bezug auf die konstante Menge von Zuschlagstoff und Zement dosierte Wasser einen geringen Einfluß auf die Festigkeit.

Aus der Praxis ist bekannt, daß die Konsistenz der Leichtbetone von dickplastischer bis zur halbflüssigen anzutreffen ist, in Abhängigkeit von der Größe der Betonelemente, von der Art der Formfüllung und von der

Betonverdichtung. Am bequemsten ist es, die Konsistenz der frischen Betonmasse mit dem Apparat Ve/Be zu prüfen. Die Betonkonsistenz, die eine genügend gemäßigte Wassermenge enthält, kann zwischen 25° ... 2° H oszillieren, bei einer so großen Weite des „Flüssigkeitsgrades" kann man Schwierigkeiten bei der Projektierung des vorgesehenen Betongemisches ausschließen.

Theoretische Festlegungen der notwendigen Wassermenge für die verlangte Konsistenz in Leichtbetonen bieten bedeutende Schwierigkeiten. Nach dem Vorschlag von K. E y m a n n [2], ist es am praktischsten, die notwendige Wassermenge experimentell festzulegen in Anbetracht der auftauchenden Schwierigkeit einer genauen Bestimmung der Wasserabsorption des Zuschlagstoffes, die in engem Verhältnis zur Form der Zuschlagstoffkörner und der Art der Poren bleibt.

In den besprochenen Experimenten die das Thema der vorliegenden Arbeit bilden, wurden die porösen Kalkstein-Zuschlagstoffe bei der Herstellung von Betongemischen nachträglich mit Wasser befeuchtet. So z.B. der Zuschlagstoff „Pinczów" in einer Menge von ungefähr 100 Liter pro Tonne, und der poröse Kalkstein-Zuschlagstoff „Karsy" 150 Liter pro Tonne.

Das Experiment wurde unter Berücksichtigung der spezifischen Eigenschaften des Kalkstein-Zuschlagstoffes durchgeführt, der die Fähigkeit besitzt große Wassermengen zu absorbieren, weil die Kinetik der Füllung der Poren mit Wasser in den besprochenen Kalkzuschlagstoffen verhältnismäßig groß ist. Die Herstellung von Betongemischen ohne vorhergehende Befeuchtung des Kalkzuschlagstoffes vor allem dann, wenn der Zementleim nicht schnell in Formen gelegt wird kann eine Konsistenzveränderung verursachen.

Der Prozeß der Zementleimentwässerung durch ungenügende Sättigung des Zuschlagstoffes mit Wasser, wodurch Schwierigkeiten bei der Verdichtung des Betons in Formen entstehen, was die Bildung von Krebsen auf der Oberfläche des Elements und Strukturkavernen zur Folge hat.

3.3. Projektierung der Betongemische

Die durchgeführten Zuschlagstoff- und Zementuntersuchungen ergaben, daß die verlangten physikalisch-mechanischen und chemischen Eigenschaften dieser Stoffe den von den Objektnormen gestellten Forderungen entsprechen. Die Charakteristiken der porösen Kalkstein-Zuschlagstoffe sind ähnlich in den Arbeiten [4], [5].

Bei der Projektierung der Zusammensetung der Leichtbetone, wurden die Brockenstapel nach der Methode der aufeinander folgenden Annäherungen zusammengestellt, dabei strebte man zur Erreichung der größten Dichte. Unabhängig davon wurde der Grundsatz befolgt, daß sich die Sieblinie im Feld der Gesteinskörnung befindet sich in Übereinstimmung mit PN — 63/B — 06250.

a) *Die Zusammensetzung des Betons aus porösem Kalkstein-Zuschlagstoff „Karsy"*

1° Kornaufbau des Zuschlagstoffes :

Fraktionen : von 0 bis 5 mm — 412 kg
von 5 bis 10 mm — 476 kg
von 10 bis 20 mm — 292 kg
zusammen = 1 180 kg/m³.

2° Portlandzement Marke 350 in einer Menge von 350 kg/m³.

3° Anmachwasser unter Berücksichtigung der natürlichen Feuchtigkeit des Zuschlagstoffes (nach Gewicht 6%) — 406 l/m³.

b) *Zussammensetzung des Betons aus porösem Kalkstein-Zuschlagstoff „Pinczów"*

1° Kornaufbau des Zuschlagstoffes :

Fraktionen : von 0 bis 5 mm — 360 kg
von 5 bis 10 mm — 430 kg
von 10 bis 20 mm — 500 kg
zusammen = 1 290 kg/m³.

2° Portlandzement Marke 350 in einer Menge von 350 kg/m³.

3° Anmachwasser unter Berücksichtigung der natürlichen Feuchtigkeit des Zuschlagstoffes (nach Gewicht 5%) — 340 l/m³.

c) *Zusammensetzung des Betons aus Keramsit-Zuschlagstoff „Mszczonów"*

1° Kornaufbau des Zuschlagstoffes :

Fraktionen : von 0 bis 5 mm — 350 kg
von 5 bis 10 mm — 360 kg
von 10 bis 20 mm — 260 kg
zusammen = 970 kg/m³.

2° Portlandzement Marke 350 in einer Menge von 350 kg/m³.

3° Anmachwasser unter Berücksichtigung der natürlichen Feuchtigkeit des Zuschlagstoffes (nach Gewicht 2%) — 306 l/m³.

d) *Zusammensetzung des Betons aus Kieszuschlagstoff*

1° Kornaufbau des Zuschlagstoffes :
Kies von 2 bis 20 mm — 1 050 kg
Kiessand — 1 020 kg
zusammen = 2 070 kg/m³.

2° Portlandzement Marke 350 zur Erreichung 28-tägiger Festigkeit des Betons R_w = 140 kg/cm², der Zementbedarf wurde auf 250 kg/m³ festgelegt.

3.4. Anfertigung der Betongemische

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht auch in einer weiteren Bestätigung der Möglichkeiten der Verwertung von porösen Kalkstein-Zuschlagstoffen in den Kernbetonen wie auch das, da die Betone aus porösen Kalksteine im Wärmeverfahren behandelt werden können so wie andere Betonarten.

In Polen sind die Vorkommen an porösen Kalksteinen sehr reich.

Sowohl leichte Kunstzuschlagstoffe wie auch die natürlichen haben ein kleineres Volumengewicht als der Zementleim, deshalb sollte man beim

Projektieren von Kernbetonen dazu streben, einen möglichst dichten Zuschlagstoffstapel zu erreichen. Wie bekannt, ein undichter Zuschlagstoffstapel zieht einen höheren Zementleimverbrauch nach sich und das vergrößert beträchtlich das Volumengewicht des Betons.

Es bestehen zwei Möglichkeiten der Mischung von Leichtbeton-komponenten, dies betrifft insbesondere die Zuschlagstoffe mit offenen Poren :

a) Zuerst werden die trockenen Komponenten dosiert, das heißt, der Zuschlagstoff und danach der Zement, nach dem Vermischen wird die benötigte Wassermenge zugegossen um die geforderte Betonkonsistenz zu erreichen, so wie es in der Arbeit [4] vorgeschlagen wird.

b) Zuerst wird ebenfalls der Zuschlagstoff dosiert, aber unter vorhergehender Befeuchtung mit Wasser oder im Betonmischer mit 1/3 bis einer 1/2 Anmachwassermenge vermischt, danach dosiert man den Zement und nach einigen Umdrehungen der Betonmischmaschine wird der Rest der festgelegten Anmachwassermenge zugegeben.

Es soll hervorgehoben werden, daß die Dosierung der Betonkomponenten wie sie in Punkt a) in Bezug auf poröse Kalksteine beschrieben wurde günstiger ist, weil das in die Betonmaschine zugeführte Wasser nach dem Vermischen der trockenen Komponenten die Durchdringung des Zementleims in die offenen Poren des Zuschlagstoffes verursacht, nach der Erhärtung vergrößert sich die Zuschlagstoffestigkeit und somit auch die Festigkeit des Betons, dank der ausgedehnteren Berührungsschicht zwischen den Zuschlagstoffkörnern und dem Zementleim. Wie bekannt [1] ist die Berührungsschicht das stärkste Element im Strukturbau des Betons, insbesondere des Leichtbetons.

In dem untersuchten Fall erfolgte die Reihenfolge der Komponentenmischung nach der unter Punkt 6 beschriebenen Methode. Die Reihenfolge wird in den nachstehenden Punkten geschildert.

Der Zuschlagstoff wurde abgewogen und für einige Stunden vor der Aufladung in den Betonmischer mit Wasser befeuchtet, der Zuschlagstoff wurde in den Betonmischer aufgeladen, nach etwas über zehn Umdrehungen wurde Zement zugegeben, der mit Zuschlagstoff vermischt wurde, danach wurde in den Betonmischer die ensprechende Menge Wasser zugegossen um die verlangte Betonkonsistenz zu erreichen.

Aus den Experimenten geht hervor, daß die geeignetste Verdichtungsmethode von Beton aus leichten Zuschlagstoffen — um eine geschlossene Struktur zwischen den Zuschlagstoffkörnern zu erhalten — die mechanische Verdichtung unter Einsatz der Vibrationsmethode ist. Bei strukturell schwachen Zuschlagstoffen wie den porösen aus gesintertem Lehm, Schwemmsteinen oder auch den porösen Kalksteinen soll man die Betonverdichtung durch Stampfen vermeiden, um die Zuschlagstoffkörner nicht zu beschädigen.

3.5. Herstellung der Betonproben

Für jede Serie wurden je 66 Walzen mit dem Durchmesser und der Höhe von 16 cm hergestellt. Die Proben wurden in Metallformen angefertigt.

Der Beton wurde auf einem Vibriertisch verdichtet mit der Schwingungsfrequenz 2 400 Schwingungen pro Minute bei 4 mm Amplitude. Die Vibrierzeit des Betons für die einzelnen Serien oszillierte zwischen 25...35 Sek. Die oberen Probenoberflächen wurden sorgfältig mit Reibstahl geglättet. Nach Verlauf von 24 Stunden wurden die Proben aus den Formen herausgenommen.

Aus jeder Serie wurden 36 Proben in die Brühkammern gelegt und 30 Proben von jeder Serie in der Halle zum Reifen in gewöhnlichen Verhältnissen gelassen und binnen 7 Tagen mit Wasser begossen. Die Proben dienten zum zeitlichen Vergleich der kontrollierten Festigkeitsergebnisse an eingebrannten Proben.

3.6. Verlauf des Einbrennens von Betonproben

Das Betoneinbrennen wurde in einer Brühkammer durchgeführt, in der ein Quotientenmessgerät zur Anzeige und Registrierung vom Typ IMR-2 installiert wurde, um die vorkommenden thermischen Veränderungen in der Brühkammer zu registrieren. Die eingebrannten Proben der einzelnen Betonserien haben drei Hauptphasen durchgemacht : 1^0 Wärmung, 2^0 Einbrennen, 3^0 Kühlung.

a) *Verlauf der Wärmung*

Die Dampferwärmung verlief ununterbrochen unter Berücksichtigung des Volumens der eingebrannten Elemente. Die Geschwindigkeit der Temperaturerhöhung überschritt nicht 25°C pro Stunde. Zur Information wird angegeben, da für massive Elemente die Temperaturerhöhung pro Stunde 20°C nicht überschreiten darf; die Erwärmungszeit ist somit für massive Elemente etwas höher. In den besprochenen Untersuchungen betrug die Erwärmungszeit 3 Stunden.

b) *Verlauf des Einbrennens*

Die optimale Dampftemperatur und die Zeit der isothermischen Erwärmung ist abhängig von der verlangten relativen Betonfestigkeit nach beendigtem Zyklus des Einbrennens wie auch von der Art des Zements. Es wurde festgestellt, da die optimale Temperatur des Einbrennens für Portlandzemente, einschließlich der schwach- und mittellehmigen Portlandzemente der höheren Qualitätssorten 80°C beträgt und für hochlehmhaltige Zemente 60°C.

Die Zeit der isothermischen Betonerwärmung unter Anwendung von Portlandzement sollte bei optimaler Temperatur den Intervall von 5 bis 8 Stunden nicht überschreiten, insbesondere bei feuchten Gemischen. In dem besprochenen Fall betrug die Zeit des Einbrennens 5 Stunden bei einer Temperatur von 85°C.

c) *Ablauf der Kühlung*

Die Kühlgeschwindigkeit der Elemente nach isothermischen Wärmung ist beschränkt, weil bei schnellem Temperaturrückgang die Gefahr der Entstehung von Oberflächenrissen besteht. Im Falle von dünnen und flachen Elementen mit großer Oberfläche kann die Temperaturabnahme

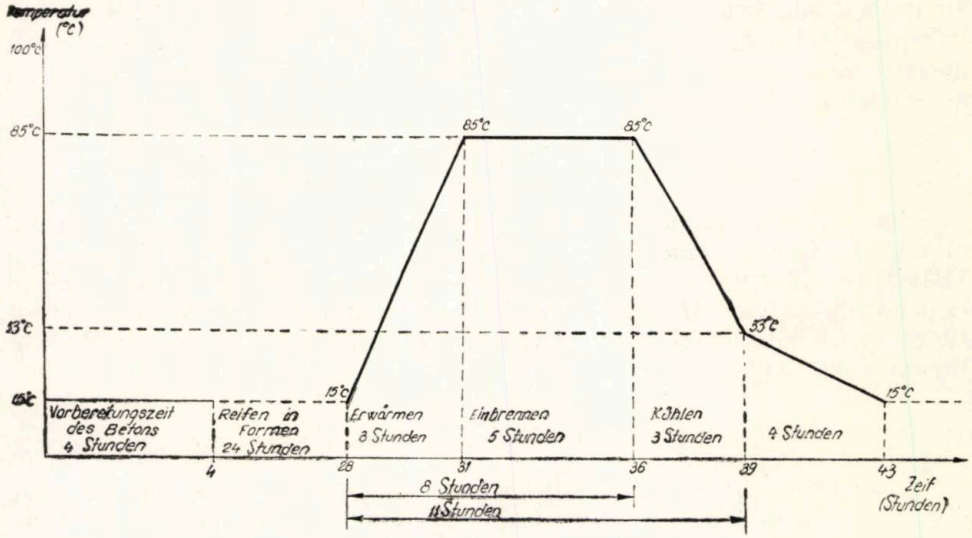


Abb. 1

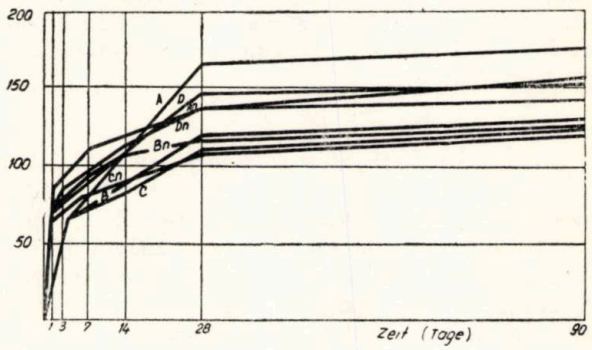


Abb. 2

sogar bis zu 35°C pro Stunde betragen, bei massiveren Elementen bis zu 30°C pro Stunde. In dem gegebenen Fall dauerte der Kühlungsprozeß 3 Stunden.

Auf Abb. 1 wurde der Verlauf des Einbrennens für die untersuchten Serien von Betonproben dargestellt.

Die Festigkeitszunahme der eingebrannten und nicht eingebrannten Betone in Zeitabschnitten wurde in Tabelle 1 wie auch in Abb. 2 dargestellt.

Tabelle 1

Zusammenstellung der Ergebnisse der Druckfestigkeitsforschungen (in kg/cm²) *an eingebrannten und nicht eingebrannten Betonen*

Untersuchungen nach Verlauf von Tagen:	Eingebrannte Betonserien				Nichteingebrannte Betonserien			
	A_n	B_n	C_n	D_n	A	B	C	D
Nach dem Einbrennen	83,5	73,6	67,5	62,2	—	—	—	—
3	92,1	78,5	74,3	83,7	61,7	59,6	63,8	56,0
7	109,4	92,7	82,2	95,8	81,7	71,7	70,6	92,2
14	118,0	106,3	92,6	113,7	90,7	83,7	118,4	—
28	136,5	116,4	108,7	136,5	166,2	118,4	111,0	147,5
90	153,9	127,6	119,5	142,9	174,0	132,4	124,1	152,2

Tabelle 2

Mittlere Volumengewichte (in kg/m³) *von eingebrannten und nichteingebrannten Betonen*

Untersuchungen nach Verlauf von Tagen:	Eingebrannte Betonserien				Nichteingebrannte Betonserien			
	A_n	B_n	C_n	D_n	A	B	C	D
Nach dem Einbrennen	1 790	1 912	1 580	2 320	—	—	—	—
3	1 772	1 910	1 570	2 284	1 790	1 915	1 560	2 320
7	1 746	1 880	1 540	2 280	1 765	1 900	1 535	2 300
14	1 730	1 855	1 508	2 265	1 740	1 870	1 520	2 275
28	1 715	1 800	1 470	2 260	1 720	1 800	1 475	2 270
90	1 680	1 760	1 440	2 240	1 690	1 762	1 445	2 245

Die Werte der Festigkeitsuntersuchungen wie auch die Volumengewichte von den Tafeln und Diagrammen sind von arithmetischen Mittelwerten aus 6 Proben repräsentiert, die den Untersuchungen in den einzelnen Zeitabschnitten zugeordnet waren.

4. Schlussfolgerungen

1. Die durchgeführten Festigkeitsuntersuchungen an Leichtbetonen, die unter Tiefdruck eingebrannt wurden, ergeben, daß sich die Betone analog zu den gewöhnlichen Betonen verhalten.

2. An den durchgeführten Beobachtungen ersieht man, daß einen prinzipiellen Einfluß auf den Verlauf der Festigkeitszunahme von eingebrannten Leichtbetonen vor allem der Zementleim hat, der isothermischen Einflüssen unterzogen wurde, die Zuschlagstoffe haben in diesen Prozessen eine mehr passive Rolle, ähnlich wie bei gewöhnlichen Kiesbetonen.

Eingegangen am 24. Oktober 1972

Technische Hochschule, Poznan
und
Landwirtschaftlicke Hochschule
Olsztyn, Polen

LITERATURVERZEICHNIS

1. Czerniejenko D. M., *Z zagadnień strultury betonu.* Inz. Bud., *8* (1958).
2. Eyman K., *Projektowanie betonów porowatych.* Zeszyt Naukowy Politechniki Warszawskiej Budownictwo, *16* (1961).
3. Dabrowski K., Szymanski J. — *Wpyw naparzania niskopreznego na mechaniczne i sytrzymalosciowe cechy konstrukcyjnego betonu keramzytowego.* Ing. Bud., *4* (1971).
4. Grabiec K., *Lekki beton konstrukcyjny z porowatego kruszywa wapiennego „Karsy".* Poznańskie Towarzystwo Przyjació Nauk. Wydz. Nauk Technicznych, Tom I, Zeszyt *2*, P. W. N. Poznań, 1966.
5. Grabiec K., *Parametry technologiczne betonów lekkich z porowatych kruszyw wapiennych.* Rozprawy nr. *15*, Politechnika Poznańska, 1966.

INFLUENŢA ABURIRII LA JOASĂ PRESIUNE ASUPRA PROPRIETĂŢILOR FIZICE ALE BETOANELOR UŞOARE

(Rezumat)

Se dovedeşte, pe cale experimentală, că tratarea betoanelor uşoare prin aburirea la joasă presiune exercită asupra rezistenţei lor aceeaşi influenţă ca şi asupra betoanelor obişnuite.

MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

1973 JUIL 27

40822